I-24　平板曲げの解析法に関する一考察

川田工業株式会社　正員　○板橋　啓治
早稲田大学大学院　学生員　松本　学
早稲田大学理工学部　正員　堀井　健一郎

1. はしがき

変位法に準拠して有限要素解析を行う場合、要素内の変位は形状関数とよばれる関数によって仮定される。要素内での変形のパターンは、解の精度，収束性に大きな影響をおよぼすことは周知の通りである。形状関数を決定するにはいくつかの方法が考えられるが、よく用いられる方法としては、1) 形状関数として未定係数を含む多項式を仮定し、要素端での変位が節点パラメータと等しいという条件から未定係数を消去してゆく方法、2) 各節点の変位が独立して単位となるような関数を重ね合せてゆく方法などが挙げられる。ここで設定された形状関数に対し解が正しい値に収束するためには、形状関数が一定ひずみをあらわす項を含むことの他、要素間での変位が連続するという条件が満足されていなければならない。板の曲げの問題を有限要素法を用いて解く場合、このような変位の連續性を満足させることはかならずしも容易ではなく、特に要素境界における法線方向の傾斜角まで含めて変位の連續性を満足させることが不可能になってくる場合がしばしば生ずる。この点を解決するために節点のパラメータとしてたわみの2階微分を導入したり、辺上にあらたに節点を設けるなど種種の研究がなされている。ここでは曲げを受ける板の要素として基本的な矩形要素をとりあげ、要素内で仮定された形状関数の性質と解との関係を考察することを試み、いくつかの数値計算を行ってみたので、その結果について報告する。

2. 形状関数

上に述べたような観点から、次に示すような3種の形状関数をとりあげ、要素剛性行列を誘導した。

1) 12項の多項式であらわされる形状関数

$$w = [1\ x\ y\ x^2\ xy\ y^2\ x^3\ x^2y\ xy^2\ y^3\ x^3y\ xy^3][\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\cdots\ \alpha_{12}]^T \qquad (2\text{-}1)$$

2) 独立変数の積としてあらわされる形状関数

$$\begin{aligned} w =\ & \phi_1(\xi)\phi_1(\eta)w_1 + a\phi_1(\xi)\phi_3(\eta)\theta_{x1} + b\phi_3(\xi)\phi_1(\eta)\theta_{y1} \\ & + \phi_2(\xi)\phi_1(\eta)w_2 + a\phi_2(\xi)\phi_3(\eta)\theta_{x2} + b\phi_4(\xi)\phi_1(\eta)\theta_{y2} \\ & + \phi_2(\xi)\phi_2(\eta)w_3 + a\phi_2(\xi)\phi_4(\eta)\theta_{x3} + b\phi_4(\xi)\phi_2(\eta)\theta_{y3} \\ & + \phi_1(\xi)\phi_2(\eta)w_4 + a\phi_1(\xi)\phi_4(\eta)\theta_{x4} + b\phi_3(\xi)\phi_2(\eta)\theta_{y4} \end{aligned} \qquad (2\text{-}2)$$

ここに　$\xi = x/b$ ，$\eta = y/a$

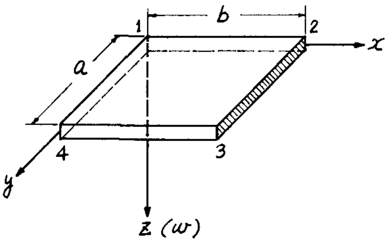
$$\phi_1(s) = 1-3s^2+2s^3,\ \phi_2(s) = 3s^2-2s^3,\ \phi_3(s) = s-2s^2+s^3,\ \phi_4(s) = -s^2+s^3$$

3) 16項の多項式であらわされる形状関数

$$w = [1\ x\ y\ x^2\ xy\ y^2\ x^3\ x^2y\ xy^2\ y^3\ x^3y\ x^2y^2\ xy^3\ x^3y^2\ x^2y^3\ x^3y^3][\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\cdots\ \alpha_{16}]^T \qquad (2\text{-}3)$$

関数(2-1)は各節点でのパラメータとしてたわみ w，二方向の傾斜角 $\partial w/\partial x$，$\partial w/\partial y$ の3個を有している。この場合要素周辺においてたわみならびに接線方向の傾斜角は定まるが、法線方向の傾斜角は

節点変位によっては一義的には定まらない。すなわち法線方向の傾斜角は要素間で不連続となる。(2-2)は上の難点を取除くために要素周辺における法線方向の傾斜角を0とおくことによって変位の連続性を満足させたものである。(2-3)は(2-1)と相似の形をしているが、節点パラメータとしてさらにたわみの2階微分 $\partial^2 w/\partial x \partial y$ を導入し各節点での自由度を4とすることによって法線方向の傾斜角の連続性を保証したものである。



矩形要素

3. 要素剛性マトリックス

要素の形状関数は次のようにあらわすことができる。

$$w = \sum_i N_i(x, y) u_i \qquad (3-1)$$

これから、要素の一般化されたひずみならびに応力は、弾性体の場合

$$\varepsilon = \sum_i B_i u_i$$

$$\sigma = D\varepsilon$$

とあらわされ、これから要素剛性マトリックスは

$$K_{ij}^e = \int_\Omega B_i D B_j \, d\Omega \qquad (3-2)$$

として与えられる。

4. 数値計算

数値計算の対象として次のようなものを選んだ。

1) 対象モデルは周辺固定ならびに周辺単純支持の正方形板であり、荷重状態は全面に載荷した等分布荷重および板中央点に作用する集中荷重を考えた。

2) 要素の分割数は 2×2, 4×4, 6×6, 8×8 の4種類とした。

計算結果から(2-1)を用いた場合と(2-3)を用いた場合とを比較した一例を挙げれば、現在のところ次のようなことが判明している。

1) ある程度以上分割を細かくした場合には、たわみならびに曲げモーメントについて(2-1)を用いた場合よりも(2-3)を用いた場合の方が精度が良い。

2) ねじりモーメントの連続性については(2-3)の方がすぐれている。

3) ここで取扱った各種のケースについて、分割数8×8の場合、誤差は最大で約5%であった。

4) これらの関数は変位の適合条件の差異にかかわらず、かならずしも単調ではないが、結局正解に収束するようである。

参考文献

1) O.C. Zienkiewicz, Y.K. Cheung : The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics. McGraw-Hill 1967

2) 梶田, 成岡 : 変断面長方形板の曲げ および振動に対する有限要素法の応用. 土木学会論文報告集 第161号 1969

3) T. Kawai, N. Yoshimura. Analysis of Large Deflection of Plates by The F.E.M.. Int. J. for N.M. in Eng., Vol. 1, 1969