断面変形をゆるす長方形はりの剛性マトリックス

法政大学　正員　大地羊三

1. 断面変形を考慮した部材（長方形断面に限る）の解式

ウラソフは，薄板で作られた長方形断面のはりがねじり荷重を受ける場合について，断面が変形することを考慮して次の微分方程式を作った。

$$\begin{bmatrix} b_1D^2 & -b_2D & b_2D^2 \\ b_2D & (aD^2-b_1) & b_1D \\ b_2D^2 & -b_1D & (b_1D^2-C) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi \\ -U \\ \chi \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \cdots (1)$$

φ＝ねじり角　　U＝一般化されたそり　　χ＝断面のひずみ角

T＝ねじりモーメント　B＝バイ・モーメント　Q＝横方向のバイ・モーメント

$D=d/dx$

$a=\frac{1}{24}EB^2H^2(Bt_b+Ht_h+6\Delta A)$

$b_1=\frac{1}{2}GB^2H^2\left(\frac{t_h}{H}+\frac{t_b}{B}\right)$

$b_2=\frac{1}{2}GB^2H^2\left(\frac{t_h}{H}-\frac{t_b}{B}\right)$

$C=\int\frac{MM}{EI}ds=2\frac{m}{\theta}=2H^2\frac{P}{\delta}$

上式は次のように分解することもできる。

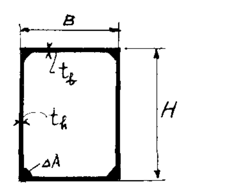
$$\begin{bmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & D & 1 \\ 0 & 0 & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T \\ B \\ Q \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C\chi \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} T \\ B \\ Q \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 \\ 0 & a & 0 \\ b_2 & 0 & b_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon_T \\ \varepsilon_B \\ \varepsilon_Q \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} \varepsilon_T \\ \varepsilon_B \\ \varepsilon_Q \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & -1 & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi \\ -U \\ \chi \end{bmatrix} \quad \cdots (2)$$

$U=Df$ とおくと，式(1)の第2，第3式より

$$\chi=\frac{a}{C}D^4f,\quad \varphi=-\frac{ab_1}{Cb_2}D^4f+\frac{a}{b_2}D^2f-\frac{b_1}{b_2}f \quad \cdots\cdots (3)$$

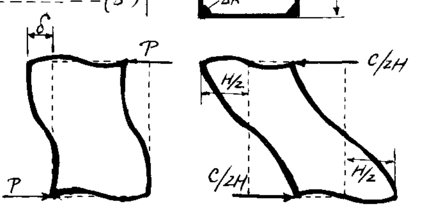
が得られ，これらを式(1)の第1式に代入すると

$$D^6f-2r^2D^4f+s^2D^2f=0 \quad \left(ただし\ r^2=\frac{b_1C}{2(b_1^2-b_2^2)},\ s^2=\sqrt{\frac{C}{a}}\right) \quad \cdots (4)$$



が得られる。これを解いた結果は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \varphi/\gamma_2as \\ U/s \\ \chi \\ \hdashline T\gamma_2/s \\ B/as^2 \\ Q/as^3 \end{bmatrix}_b=\frac{1}{B_0}\left[\begin{array}{ccc:ccc} B_0 & A_{1-} & -B_1 & A_{1+}+B_0A_0 & B_{2-}-B_0 & -A_{1+} \\ 0 & B_{2-} & A_{1-} & B_{2-}-B_0 & A_{2+} & B_1 \\ 0 & -A_{1+} & B_{2+} & -A_{1+} & B_1 & A_{2+} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & B_0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{1-} & -B_1 & A_{1-} & B_{2-} & -A_{1+} \\ 0 & -B_1 & A_{1+} & -B_1 & A_{1-} & B_{2+} \end{array}\right]\begin{bmatrix} \varphi/\gamma_2as \\ U/s \\ \chi \\ \hdashline T\gamma_2/s \\ B/as^2 \\ Q/as^3 \end{bmatrix}_a \quad \cdots\cdots (5)$$



ただし

$$\begin{cases} A_0=\dfrac{\gamma_1 l}{\gamma_2^2as} & A_{1\pm}=\dfrac{\alpha\phi_1\pm\beta\phi_3}{s} & A_{2\pm}=\dfrac{\alpha(\alpha^2-3\beta^2)\phi_1\pm\beta(3\alpha^2-\beta^2)\phi_3}{s^3} \\ B_0=\dfrac{2\alpha\beta}{s^2} & B_1=\phi_4 & B_{2\pm}=\dfrac{2\alpha\beta\phi_2\pm r^2\phi_4}{s^2} \\ \phi_1=Ch\alpha l\sin\beta l & \phi_2=Ch\alpha l\cos\beta l & \phi_3=Sh\alpha l\cos\beta l \quad \phi_4=Sh\alpha h\sin\beta l \end{cases}$$

$\alpha^2=(s^2+r^2)/2$

$\beta^2=(s^2-r^2)/2$

$\gamma_1=b_1/(b_1^2-b_2^2)$

$\gamma_2=b_2/(b_1^2-b_2^2)$

2. 剛性マトリックス

式(5)はレダクション法にそのまま使える形をしている。これを変形法に都合のより形にするためには，部材両端の断面力の方向を（たわみ角の曲げモーメントのように）そろえる必要がある。さらに式(5)ではねじり角φ，ねじりモーメントTの正の方向左手系で定義されている。これらは右手系

になおした方が都合がよい（１本のはりを取扱っている限りでは，左手系から右手系への変換は必ずしも必要とするものではない）。以上のために $\varphi_a,\ \varphi_b,\ T_b;\ U_a,\ U_b,\ B_a;\ \chi_a,\ \chi_b,\ Q_b$ の符号を変えると式(5)は次のようになる。

$$\begin{bmatrix}\varphi\\ U\\ \chi\\ \hline T\\ B\\ Q\end{bmatrix}_b=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & \frac{\gamma_2 a}{B_0}A_{1-} & \frac{-\gamma_2 a\lambda}{B_0}B_1 & \frac{-\gamma_2^2 a}{B_0}(A_{1+}+B_0A_0) & \frac{\gamma_2}{B_0\lambda}(B_2-B_0) & \frac{\gamma_2}{B_0\lambda^2}A_{1+}\\ 0 & \frac{1}{B_0}B_{2-} & \frac{\lambda}{B_0}A_{1-} & \frac{-\gamma_2}{B_0}(B_{2-}-B_0) & \frac{1}{B_0a\lambda}A_{2+} & \frac{1}{B_0a\lambda^2}B_1\\ 0 & \frac{-1}{B_0\lambda}A_{1+} & \frac{1}{B_0}B_{2+} & \frac{\gamma_2}{B_0\lambda}A_{1+} & \frac{1}{B_0a\lambda^2}B_1 & \frac{-1}{B_0a\lambda^3}A_{2+}\\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{-a\lambda}{B_0}A_{1-} & \frac{a\lambda^2}{B_0}B_1 & \frac{\gamma_2 a\lambda}{B_0}A_{1-} & \frac{-1}{B_0}B_{2-} & \frac{-1}{B_0\lambda}A_{1+}\\ 0 & \frac{-a\lambda^2}{B_0}B_1 & \frac{a\lambda^3}{B_0}A_{1+} & \frac{\gamma_2 a\lambda^2}{B_0}B_1 & \frac{\lambda}{B_0}A_{1-} & \frac{1}{B_0}B_{2+}\end{array}\right]\begin{bmatrix}\varphi\\ U\\ \chi\\ \hline T\\ B\\ Q\end{bmatrix}_a \quad \text{------}(6)$$

上式を簡単に下の左のように書き，$\mathbf{f}_a$，$\mathbf{f}_b$ について解くと式(8)が得られる。これに $\mathbf{f}_{fa}$，$\mathbf{f}_{fb}$ を

$$\begin{bmatrix}\mathbf{u}_b\\ \mathbf{f}_b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12}\\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}_a\\ \mathbf{f}_a\end{bmatrix}\text{---}(7)\qquad \begin{bmatrix}\mathbf{f}_a\\ \mathbf{f}_b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\mathbf{a}_{12}^{-1}\mathbf{a}_{11} & ,\ \mathbf{a}_{12}^{-1}\\ \mathbf{a}_{21}-\mathbf{a}_{22}\mathbf{a}_{12}^{-1}\mathbf{a}_{11} & ,\ \mathbf{a}_{22}\mathbf{a}_{12}^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}_a\\ \mathbf{u}_b\end{bmatrix}\text{---}(8)\qquad \left.\begin{array}{l}\mathbf{f}_a=\mathbf{k}_{aa}\mathbf{u}_a+\mathbf{k}_{ab}\mathbf{u}_b+\mathbf{f}_{fa}\\ \mathbf{f}_b=\mathbf{k}_{ba}\mathbf{u}_a+\mathbf{k}_{bb}\mathbf{u}_b+\mathbf{f}_{fb}\end{array}\right\}\text{---}(9)$$

加えたものを式(9)のように書くことにすると，これで変形法の基本式が求められたことになる。

$\mathbf{f}_{fa}$，$\mathbf{f}_{fb}$ は各部材を両端固定ばりとした場合の固定端断面力であり，中間に荷重が作用しない場合は $\mathbf{0}$ とすればよい。あとは各部材毎に作られた式(9)を用いて節点方程式を作ればよい。３本の部材からなるはりの場合は次のようになる。

$$\begin{bmatrix}\mathbf{k}_{aa}^{(1)} & \mathbf{k}_{ab}^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{k}_{ba}^{(1)} & (\mathbf{k}_{bb}^{(1)}+\mathbf{k}_{aa}^{(2)}) & \mathbf{k}_{ab}^{(2)} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{ba}^{(2)} & (\mathbf{k}_{bb}^{(2)}+\mathbf{k}_{aa}^{(3)}) & \mathbf{k}_{ab}^{(3)}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{ba}^{(3)} & \mathbf{k}_{bb}^{(3)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1\\ \mathbf{u}_2\\ \mathbf{u}_3\\ \mathbf{u}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{P}_1\\ \mathbf{P}_2\\ \mathbf{P}_3\\ \mathbf{P}_4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathbf{f}_{fa}+\mathbf{0}\\ \mathbf{f}_{fa}+\mathbf{f}_{fb}\\ \mathbf{f}_{fa}+\mathbf{f}_{fb}\\ \mathbf{0}+\mathbf{f}_{fb}\end{bmatrix}\text{------}(10)$$

式(6)の内容を用いて $\mathbf{k}_{aa}\sim\mathbf{k}_{bb}$ を計算すると次のようになる。

$$\mathbf{k}_{aa}=\frac{1}{G}\left\{\begin{bmatrix}1\\ -E\\ -F\end{bmatrix}\frac{B_0}{\Delta}\begin{bmatrix}1 & -E & -F\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\ 0&A&-C\\ 0&-C&B\end{bmatrix}\right\},\quad \mathbf{k}_{ab}=\frac{-1}{G}\left\{\begin{bmatrix}1\\ -E\\ -F\end{bmatrix}\frac{B_0}{\Delta}\begin{bmatrix}1 & E & -F\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\ 0&\bar{A}&-\bar{C}\\ 0&\bar{C}&\bar{B}\end{bmatrix}\right\}$$

$$\mathbf{k}_{ba}=\frac{-1}{G}\left\{\begin{bmatrix}1\\ E\\ -F\end{bmatrix}\frac{B_0}{\Delta}\begin{bmatrix}1 & -E & -F\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\ 0&\bar{A}&\bar{C}\\ 0&-\bar{C}&\bar{B}\end{bmatrix}\right\},\quad \mathbf{k}_{bb}=\frac{1}{G}\left\{\begin{bmatrix}1\\ E\\ -F\end{bmatrix}\frac{B_0}{\Delta}\begin{bmatrix}1 & E & -F\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\ 0&A&C\\ 0&C&B\end{bmatrix}\right\}\quad(11)$$

$$\begin{aligned}
A&=a\lambda(A_{1+}B_1-A_{2+}B_{2-})\\
B&=a\lambda^3(A_{1-}B_1-A_{2-}B_{2+})\\
C&=a\lambda^2(B_1B_{2+}-A_{2+}A_{1\pm})\\
\bar{A}&=a\lambda A_{2+}B_0\\
\bar{B}&=-a\lambda^3A_{2-}B_0\\
\bar{C}&=a\lambda^2B_1B_0\\
E&=\gamma_2a\lambda(B_1A_{1+}+A_{2+}(B_{2-}-B_0))\\
F&=\gamma_2a\lambda^2(A_{2-}A_{1+}+B_1(B_{2-}-B_0))\\
G&=B_1^2-A_{2+}A_{2-}\\
\Delta&=\gamma_2^2a\lambda\left[(A_{1-}+B_0A_0)(B_1^2-A_{2+}A_{2-})\right.\\
&\quad\left.+\left\{A_{1+}^2A_{2-}+2(B_{2-}-B_0)B_1A_{1+}+(B_{2-}-B_0)^2A_{2+}\right\}\right]
\end{aligned}$$

式(6)はねじり荷重を受ける場合の基本式である。横荷重や軸方向荷重を同時に受ける場合は，式(6)にそれぞれの剛性マトリックスを追加すればよい。この場合式の形は式(9)と同じであるが，内容は次のように変って来る。

$$\mathbf{f}=\begin{bmatrix}N\\ S_v\\ S_w\\ \boxed{\begin{matrix}T\\ B\\ Q\end{matrix}}\\ M_v\\ M_w\end{bmatrix},\quad \mathbf{u}=\begin{bmatrix}u\\ v\\ w\\ \boxed{\begin{matrix}\varphi\\ U\\ \chi\end{matrix}}\\ \theta_v\\ \theta_w\end{bmatrix},\quad \mathbf{k}_{aa}=\left[\begin{array}{ccc|ccccc}EA/l & 0 & 0 & 0&0&0 & 0 & 0\\ 0 & 12EI_w/l^3 & 0 & 0&0&0 & 0 & 6EI_w/l^2\\ 0 & 0 & 12EI_v/l^3 & 0&0&0 & -6EI_v/l^2 & 0\\ \hline 0&0&0 & & & & 0 & 0\\ 0&0&0 & & \boxed{\text{ねじりの }\mathbf{k}_{aa}} & & 0 & 0\\ 0&0&0 & & & & 0 & 0\\ 0 & 0 & -6EI_v/l^2 & 0&0&0 & 4EI_v/l & 0\\ 0 & 6EI_w/l^2 & 0 & 0&0&0 & 0 & 4EI_w/l\end{array}\right]$$

参考文献

V.Z.ウラソフ（奥村外共訳）“薄肉弾性ばりの理論”技報堂（昭和42年）