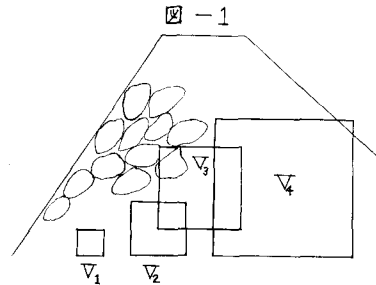


中央大学理工学部 正員 川原 睦人

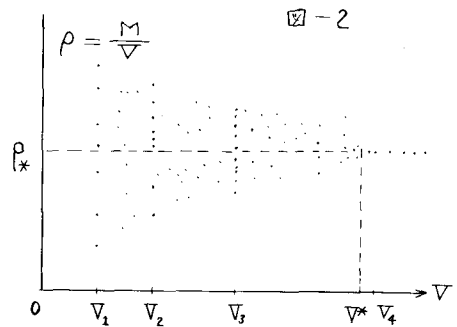
1. 緒言

変位ベクトル $u_i (i=1, 2, 3)$ と回転ベクトル $\omega_i (i=1, 2, 3)$ とがそれぞれ独立に存在するとするマイクロポーラ体の考えを、場所ごとに異った性質をもつ材料に適用する一つの方法をこの報告では述べる。対象としては、岩盤、土質などへの応用の可能性と追求するために第1段階として、等方性を仮定し、また線型弾性体とする。

いま、粒径の大きな粒状体から粒径の小さな粒状体まで、ある分布に従うような材料から構成される構造を考える。いま、図-1に示すごとく、任意の大きさをもつ領域 V_1, V_2, \dots, V_n を取り出し、それぞれの密度とその体積を横軸としてプロットすれば、図-2のごとくになるであろう。



すなわち、着目する領域が小さい場合には、その位置が異ると密度が変化しバラツキが激しくなる。しかし、ある大きさの領域以上では、位置に関係なく密度は一定となるであろう。この材質が一定となる限界の状態に着目して議論を進めれば、材料の微視的な性質を考慮して、構造解析を進めることが可能になると思われる。一方、このような解析を進めるためには、よりいっそう材料の性質を調べることが必要であるが、ここでは、いくつかの仮定の下に、巨視的にマイクロポーラ体におき変える方法について述べることにする。



2. マイクロポーラ体の基礎方程式

任意の微小な物体内の体素 dV に着目し、その表面力を P_i 、表面モーメントを m_i で表わすことにすると、応力 T_{ij} と偶応力 μ_{ij} はそれぞれ次式で与えられる。

$$P_i = T_{ij} n_j \quad \dots\dots 2.1$$

$$m_i = \mu_{ij} n_j \quad \dots\dots 2.2$$

ここに n_j は表面 S にたてた外向き単位法線ベクトルである。同一項にくり返して表われる添字に対しては、その最大個数まで積和をつくる和算規約を用いて表わすものとする。

応力と偶応力は平衡条件を満足しなければならない。密度を ρ 、物体力を X_i 、物体モーメントを Y_i で表わせば、つりあい方程式は次のようになる。

$$\tau_{jij} + \rho X_i = 0 \quad \dots\dots\dots 2.3$$

$$\epsilon_{ijk} \tau_{jk} + \mu_{jki} + \rho Y_i = 0 \quad \dots\dots\dots 2.4$$

ここに ϵ_{ijk} は交代記号である。 ∂_i は空間に関する微分を表わす。

変位 U_i および回転 ω_i によって、ひずみ γ_{ij} および曲率 κ_{ij} をそれぞれ

$$\gamma_{ji} = U_{i,j} - \epsilon_{kji} \omega_k \quad \dots\dots\dots 2.5$$

$$\kappa_{ji} = \omega_{i,j} \quad \dots\dots\dots 2.6$$

を導入する。 2.3~2.6式よりエネルギーの平衡条件として、

$$\int_V (\tau_{ji} \dot{\gamma}_{ji} + \mu_{ji} \dot{\kappa}_{ji}) dV = \int_V (\rho X_i \dot{U}_i + \rho Y_i \dot{\omega}_i) dV + \int_S (p_i \dot{U}_i + m_i \dot{\omega}_i) dS \quad \dots\dots\dots 2.7$$

を得ることが出来る。 ∂_t は時間に関する微分を表わす。

いま、等方弾性体を考えることにして、構成方程式をそれぞれ、

$$\tau_{ji} = E_{jilk} \gamma_{lk} \quad \dots\dots\dots 2.8$$

$$\mu_{ji} = M_{jilk} \kappa_{lk} \quad \dots\dots\dots 2.9$$

$$E_{ijkl} = [(\mu + \alpha) \delta_{jl} \delta_{ik} + (\mu - \alpha) \delta_{il} \delta_{jk} + \lambda \delta_{ij} \delta_{kl}] \quad \dots\dots\dots 2.10$$

$$M_{jilk} = [(\gamma + \epsilon) \delta_{jl} \delta_{ik} + (\gamma - \epsilon) \delta_{il} \delta_{jk} + \beta \delta_{ij} \delta_{kl}] \quad \dots\dots\dots 2.11$$

とする。ここに δ_{ij} はクロネッカーのデルタ関数を表わしている。

解析する連続体を、有限個の領域すなわち有限要素に分割して、要素内の変位 U_i 、回転 ω_i をそれぞれ、有限要素の境界上で選ばれた節点における値 $U_{\alpha i}$ 、 $\omega_{\alpha i}$ を用いて内挿近似する。この近似関数を Φ_{α} とすれば

$$U_i = \Phi_{\alpha} U_{\alpha i} \quad \dots\dots\dots 2.12$$

$$\omega_i = \Phi_{\alpha} \omega_{\alpha i} \quad \dots\dots\dots 2.13$$

となる。 2.5~2.13式を用いるとマイクロポラ体の有限要素法による解式を次のように求めることができる。

$$K_{\alpha i \beta j} \cdot U_{\beta j} + H_{\alpha i \beta j} \cdot \omega_{\beta j} = \Omega_{\alpha i} \quad \dots\dots\dots 2.14$$

$$H_{\alpha i \beta j} \cdot U_{\beta j} + N_{\alpha i \beta j} \cdot \omega_{\beta j} = \Gamma_{\alpha i} \quad \dots\dots\dots 2.15$$

$$K_{\alpha i \beta j} = \int_V (\Phi_{\alpha, l} E_{likj} \Phi_{\beta, k}) dV$$

$$H_{\alpha i \beta j} = - \int_V (\Phi_{\alpha, l} \delta_{ik} E_{lknm} \epsilon_{jnm} \Phi_{\beta}) dV$$

$$N_{\alpha i \beta j} = \int_V (\Phi_{\alpha} \epsilon_{inm} E_{nmllk} \epsilon_{jlk} \Phi_{\beta} + \Phi_{\alpha, l} M_{likj} \Phi_{\beta, k}) dV$$

$$\Omega_{\alpha i} = \int_V (\Phi_{\alpha} \rho X_i) dV + \int_S (\Phi_{\alpha} p_i) dS, \quad \Gamma_{\alpha i} = \int_V (\Phi_{\alpha} \rho Y_i) dV + \int_S (\Phi_{\alpha} m_i) dS$$

3. 構成方程式 について.

構成方程式 2.8 式, 2.9 式は, 平面ひずみ状態の場合次のようになる。

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= 2\mu \cdot \gamma_{11} + \lambda (\gamma_{11} + \gamma_{22}) & , & \quad \tau_{22} = 2\mu \cdot \gamma_{22} + \lambda (\gamma_{11} + \gamma_{22}) \\ \tau_{12} &= \mu (\gamma_{12} + \gamma_{21}) + \alpha (\gamma_{12} - \gamma_{21}) & , & \quad \tau_{21} = \mu (\gamma_{12} + \gamma_{21}) + \alpha (\gamma_{21} - \gamma_{12}) \quad \dots\dots\dots 3.1 \\ \mu_{13} &= 2\beta \cdot \chi_{13} & , & \quad \mu_{23} = 2\beta \cdot \chi_{23} \end{aligned}$$

いま, ここで, それぞれ以下のごとく, 応力とひずみを置き変える。

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \tau_{11} & \varepsilon_{11} &= \gamma_{11} \\ \sigma_{12} &= \tau_{12} + \tau_{21} & \varepsilon_{12} &= \gamma_{12} + \gamma_{21} \\ \sigma_{21} &= \tau_{21} + \tau_{12} & \varepsilon_{21} &= \gamma_{21} + \gamma_{12} & \dots\dots\dots 3.2 \\ \sigma_{22} &= \tau_{22} & \varepsilon_{22} &= \gamma_{22} \\ t_{12} &= \tau_{12} - \tau_{21} & \gamma_{12} &= \gamma_{12} - \gamma_{21} \\ t_{21} &= \tau_{21} - \tau_{12} & \gamma_{21} &= \gamma_{21} - \gamma_{12} \end{aligned}$$

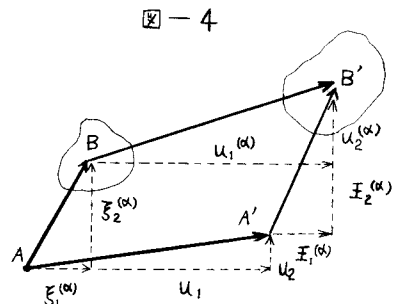
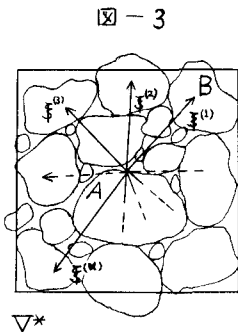
一般の弾性体での応力とひずみはそれぞれ $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{22}, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}$ であり $\sigma_{12} = \sigma_{21}, \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$ である。 $t_{12}, t_{21}, \gamma_{12}, \gamma_{21}$ は マイクロポーラ体であることを記述する応力とひずみである。 3.2 式を用いて 3.1 式を変形すると結局,

$$\begin{aligned} \sigma_{11} - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} &= 2\mu \cdot \left(\varepsilon_{11} - \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{3} \right) \\ \sigma_{12} &= 2\mu \cdot \varepsilon_{12} \\ \sigma_{21} &= 2\mu \cdot \varepsilon_{21} \\ \sigma_{22} - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} &= 2\mu \cdot \left(\varepsilon_{22} - \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{3} \right) \\ \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} &= (2\mu + 3\lambda) (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) & \dots\dots\dots 3.3 \\ t_{12} &= 2\alpha \cdot \gamma_{12} \\ t_{21} &= 2\alpha \cdot \gamma_{21} \\ \mu_{13} &= 2\beta \cdot \chi_{13} \\ \mu_{23} &= 2\beta \cdot \chi_{23} \end{aligned}$$

となる。 図-3 のごとく V^* 内の粒状体の V^* の重心よりの位置をそれぞれ $\xi_1^{(\alpha)}, \xi_2^{(\alpha)}$ と表わすことにする。 V^* の重心における変位を u_1, u_2 , 回転を, ω_3 で表わせば, 任意の位置における粒状体の変形は,

$$\begin{aligned} u_1^{(\alpha)} &= u_1 - \omega_3 \xi_2^{(\alpha)} - \xi_1^{(\alpha)} \\ u_2^{(\alpha)} &= u_2 + \omega_3 \xi_1^{(\alpha)} - \xi_2^{(\alpha)} \quad \dots\dots 3.4 \\ \omega_3^{(\alpha)} &= \omega_3 \end{aligned}$$

である。



3.4式にみるとく、応力 $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{22}$ と $\epsilon_{11}, \epsilon_{12}, \epsilon_{21}, \epsilon_{22}$ との関係は、応力 t_{12}, t_{21} と γ_{12}, γ_{21} 、偶応力 μ_{13}, μ_{23} と曲率 χ_{13}, χ_{23} との関係とは独立に与えることができる。そこでおのおのの粒状体のひずみと体積 V^* のひずみとの間の関係を次のように仮定する。

$$\begin{aligned} \epsilon_{11}^{(\alpha)} &= \epsilon_{11} & \epsilon_{22}^{(\alpha)} &= \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12}^{(\alpha)} &= \epsilon_{12} & \epsilon_{21}^{(\alpha)} &= \epsilon_{21} \\ \gamma_{11}^{(\alpha)} &= -\chi_{13} \cdot \xi_2^{(\alpha)} & & \dots\dots\dots 3.5 \\ \gamma_{12}^{(\alpha)} &= \gamma_{12}^{(\alpha)} - \gamma_{21}^{(\alpha)} = \gamma_{12} + \chi_{13} \cdot \xi_1^{(\alpha)} + \chi_{23} \cdot \xi_2^{(\alpha)} \\ \gamma_{21}^{(\alpha)} &= \gamma_{21}^{(\alpha)} - \gamma_{12}^{(\alpha)} = \gamma_{21} - \chi_{13} \cdot \xi_1^{(\alpha)} - \chi_{23} \cdot \xi_2^{(\alpha)} \\ \gamma_{22}^{(\alpha)} &= \chi_{23} \cdot \xi_1^{(\alpha)} \end{aligned}$$

さらに、粒状体の応力とひずみの関係を次のごとく与えておく。

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(\alpha)} - \frac{\sigma_{11}^{(\alpha)} + \sigma_{22}^{(\alpha)} + \sigma_{33}^{(\alpha)}}{3} &= 2\mu^{(\alpha)} \cdot \left(\epsilon_{11}^{(\alpha)} - \frac{\epsilon_{11}^{(\alpha)} + \epsilon_{22}^{(\alpha)}}{3} \right) \\ \sigma_{12}^{(\alpha)} &= 2\mu^{(\alpha)} \cdot \epsilon_{12}^{(\alpha)}, & \sigma_{21}^{(\alpha)} &= 2\mu^{(\alpha)} \cdot \epsilon_{21}^{(\alpha)} \\ \sigma_{22}^{(\alpha)} - \frac{\sigma_{11}^{(\alpha)} + \sigma_{22}^{(\alpha)} + \sigma_{33}^{(\alpha)}}{3} &= 2\mu^{(\alpha)} \cdot \left(\epsilon_{22}^{(\alpha)} - \frac{\epsilon_{11}^{(\alpha)} + \epsilon_{22}^{(\alpha)}}{3} \right) & & \dots\dots\dots 3.6 \\ \sigma_{11}^{(\alpha)} + \sigma_{22}^{(\alpha)} + \sigma_{33}^{(\alpha)} &= (2\mu^{(\alpha)} + 3\lambda^{(\alpha)}) (\epsilon_{11}^{(\alpha)} + \epsilon_{22}^{(\alpha)}) \\ t_{11}^{(\alpha)} &= 2\pi^{(\alpha)} \cdot \gamma_{11}^{(\alpha)}, & t_{22}^{(\alpha)} &= 2\pi^{(\alpha)} \cdot \gamma_{22}^{(\alpha)} \\ t_{12}^{(\alpha)} &= 2\pi^{(\alpha)} \cdot \gamma_{12}^{(\alpha)}, & t_{21}^{(\alpha)} &= 2\pi^{(\alpha)} \cdot \gamma_{21}^{(\alpha)} \end{aligned}$$

3.4, 3.5, 3.6式を用いて、粒状体すべてのなす仕事 \dot{W}^* のなす仕事に等しいとする関係を考えると、3.1式の係数が、それぞれ次のように決定することができる。

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\sum_{\alpha} \int_{V^{(\alpha)}} (\rho^{(\alpha)} \mu^{(\alpha)}) dV^{(\alpha)}}{\sum_{\alpha} \int_{V^{(\alpha)}} \rho^{(\alpha)} dV^{(\alpha)}} & \lambda &= \frac{\sum_{\alpha} \int_{V^{(\alpha)}} (\rho^{(\alpha)} \lambda^{(\alpha)}) dV^{(\alpha)}}{\sum_{\alpha} \int_{V^{(\alpha)}} \rho^{(\alpha)} dV^{(\alpha)}} \\ 2\alpha &= \frac{\sum_{\alpha} \int_{V^{(\alpha)}} (\rho^{(\alpha)} \pi^{(\alpha)}) dV^{(\alpha)}}{\sum_{\alpha} \int_{V^{(\alpha)}} \rho^{(\alpha)} dV^{(\alpha)}} & & \dots\dots\dots 3.7 \\ 2\beta &= \frac{\sum_{\alpha} \int_{V^{(\alpha)}} [\{ (\xi_1^{(\alpha)})^2 + (\xi_2^{(\alpha)})^2 \} \pi^{(\alpha)} \rho^{(\alpha)}] dV^{(\alpha)}}{\sum_{\alpha} \int_{V^{(\alpha)}} \rho^{(\alpha)} dV^{(\alpha)}} \end{aligned}$$

4. 結言.

粒状体で構成されるような構造をマイクロポラ体に置き変えて解析する一つの方法を試みた。この報告で述べた方法では、等方性弾性体として扱っているが、エネルギーの消滅を考えれば同様の方法によって、非線型の構成方程式が得られるものと考えてのる。