

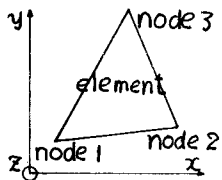
東京工業大学 正会員 吉田 裕
 新日本製鉄 正会員 雨宮栄一郎
 東京工業大学 学生員 ○増田陳紀

I まえがき

本講演は、種々の異った構造要素を一体化することを前提とした、統一的な計画に基づいて、節点変位として面内の回転を考慮した、平面応力要素の開発を行い、応力評価に対しても合理的な平板曲げ要素をつくらせた経過を報告し、これらの重ね合せとしてつくられた汎用立体構造解析薄板要素による立体構造の有限要素解析について述べるものである。

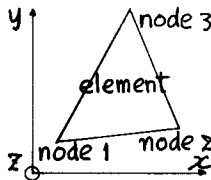
本解析における有限要素モデルは、平面応力モデル、平板曲げモデル共に、3角形9自由度のハイブリッド応力モデルであり、従って立体解析においては、1節点6自由度の18自由度3角形要素となる。これは、任意形状の対象に適合可能であること、および節点量が物理的に明確であること、の2点を考慮したものである。

図1、2は平面応力モデルと平板曲げモデルについて、節点変位 U 、節点力 F 、要素内の歪 ϵ および ϵ に対応する要素内の応力 σ の成分を示したものである。なお本文を通じて、記号 p 、 b はそれぞれ、平面応力および平板曲げに関することを表わす。



$$\begin{aligned}
 pU_i^T &= \{U \ V \ \theta_z\} \text{node } i \\
 pF_i^T &= \{P_x \ P_y \ M_z\} \text{node } i \\
 p\epsilon^T &= \{E_x \ E_y \ \gamma_{xy}\} \text{interior} \\
 p\sigma^T &= \{\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_{xy}\} \text{interior}
 \end{aligned}$$

図1 平面応力モデル



$$\begin{aligned}
 bU_i^T &= \{W \ W_x \ W_y\} \text{node } i \\
 bF_i^T &= \{P_x \ M_x \ M_y\} \text{node } i \\
 b\epsilon^T &= \{W_{xx} \ W_{yy} \ \gamma_{xy}\} \text{interior} \\
 b\sigma^T &= \{M_x \ M_y \ M_{xy}\} \text{interior}
 \end{aligned}$$

図2 平板曲げモデル

II 平面応力解析

3角形9自由度の面内応力モデルとする。すなわち、3角形の各頂点に設定した節点において、面内直交二軸方向の変位 U 、 V および面内回転変位 θ_z の3成分を節点変位としてとるものである。

立体解析においては、板系が任意結合する場合に、無理のない対応が可能でなければならぬが、面内回転変位成分 θ_z を節点変位成分として(U 、 V)に対し独立に与えることにより、 θ_z に対応する振りモーメントを直接に扱うことができ、三次元的に接続する二要素間の変位の適合が明瞭に表わされる。 θ_z の導入による二次元解析の有効性と、三次元解析に応用する際の利点、および物理的利点の重要性は次のように考えられる。

- (i) 節点変位成分を(U 、 V 、 θ_z)の3成分とすることにより、要素辺上の変位を3次関数で補間することができ、変形がより忠実に評価される。
- (ii) θ_z に対応する節点力成分は、積分的意味における集中トルクであり、面内の集中トルクを節点で評価できる利点をもつ。
- (iii) 板系と他の部材系との接続節点の変位成分が、立体的に明確な連続性を示す。

*本講演は、土木学会論文報告集に投稿予定の同題の論文の内容を要約したものである。

(iv) 殻構造などの任意の立体構造に対して、構造系の剛性マトリックスに特異性を生じない。

要素内応力分布を線型に仮定すれば、節点における対応する応力値 $p\sigma^e$ の関数として、要素内の応力 $p\sigma$ は(3)式のように表わされる。

$p\sigma^e$ は9成分よりなるが、応力 $p\sigma$ が要素内で平衡条件を満たすことが必要であるから $p\sigma^e$ の成分のうち、独立な成分からなるベクトル $p\sigma_{eg}^e$ を用いて、 $p\sigma^e$ は(4)式のように表わされる。ここに $[R]$ は 9×7 のマトリックスである。

$$p\sigma^e = \{ p\sigma_1^T \ p\sigma_2^T \ p\sigma_3^T \} \quad (1)$$

$$p\sigma_i^T = \{ \sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_{xy} \} \text{ node } i \quad (2)$$

$$p\sigma = [T] \cdot p\sigma^e \quad (3)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

S_1, S_2, S_3 は面積座標

$$p\sigma^e = [R] \cdot p\sigma_{eg}^e \quad (5)$$

これらの結果から、相補エネルギー関数 Π_{cp} は、

$$\begin{aligned} \Pi_{cp} &= \sum_m \Pi_{cpm} \quad (6) \\ \Pi_{cpm} &= \frac{1}{2} \iiint_{V_m} p\epsilon^T \cdot p\sigma \, dV - \oint_{S_m} pU_B^T \cdot p\sigma_B^e \, dS \\ &= \frac{1}{2} p\sigma^e T [pH] p\sigma^e - pU^E T [pQ] p\sigma^e \\ &= \frac{1}{2} p\sigma_{eg}^e T [HH] p\sigma_{eg}^e - pU^E T [QR] p\sigma_{eg}^e \end{aligned} \quad (7)$$

ここに、 $[pH] = t \iint_{A_m} [T]^T [pN]^T [T] \, dA$, $[pQ] = \oint_{S_m} [pL_B] [pM_B] \, dS$, $[HH] = [R]^T [pH] [R]$, $[QR] = [pQ] [R]$
 $p\epsilon = [pN] p\sigma$, 又、 $pU^E T = \{ pU_1^T \ pU_2^T \ pU_3^T \}$ は要素節点変位、 $pU_B^T = \{ pU_{B1}^T \ pU_{B2}^T \ pU_{B3}^T \}$ は要素周辺変位、 $p\sigma_B^T = \{ p\sigma_{B1}^T \ p\sigma_{B2}^T \ p\sigma_{B3}^T \}$ は要素周辺応力、 \oint_{S_m} は要素周辺全周にわたる積分。なお、
 $pU_{Bi}^T = \{ u_n \ u_s \ \theta \} \text{ side } i$, $p\sigma_{Bi}^T = \{ \sigma_n \ \sigma_s \ \sigma_{ns} \} \text{ side } i$.

ここで要素周辺変位 pU_B^T は、要素節点変位 pU^E の関数として一義的に決まるように、 u_n については3次関数、 u_s については1次関数が補間する。すなわち、 $pU_B^T = [pL_B] pU^E$ (図3参照)。

又、要素周辺応力 $p\sigma_B^T$ は、要素内応力の関数として表わされるから、(3)式より、 $p\sigma_B^T = [pM_B] p\sigma^e$

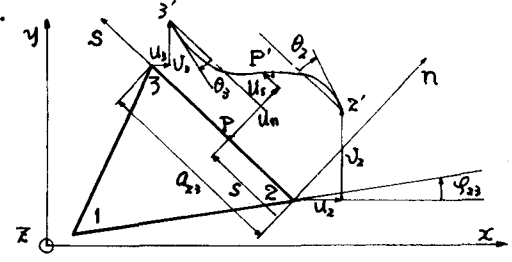


図3

Π_{cp} の停留条件より $p\sigma_{eg}^e$ が(8)式のように、要素節点変位ベクトル pU^E によって表わされ、この要素節点変位 pU^E に対応する要素節点力を pff^e とすると、仮想仕事の原理から(9)式を得る。これより、要素剛性マトリックス $[pk]$ は、(11)式のように得られる。なお、 pU^E が得られると、要素節点応力 $p\sigma^e$ は、(12)式により求められる。

$$p\sigma_{eg}^e = [HH]^{-1} [QR]^T pU^E \quad (8)$$

$$\begin{aligned} (\delta pU^E)^T pff^e &= \iiint_{V_m} (\delta p\epsilon)^T \cdot p\sigma \, dV \\ &= (\delta p\sigma^e)^T [pH] p\sigma^e \\ &= (\delta pU^E)^T [QR] [HH] [QR]^T pU^E \end{aligned} \quad (9)$$

$$pff^e = [pk] pU^E \quad (10)$$

$$[pk] = [QR] [HH]^{-1} [QR]^T \quad (11)$$

$$p\sigma^e = [R] p\sigma_{eg}^e = [R] [HH]^{-1} [QR]^T pU^E \quad (12)$$

本モデルによる応用解析例を図4、5に示す。図4は円板に集中トルクを作用させたときの変形および剪断応力分布。図5は正方形板の対辺に等分布荷重を作用させたときの変形および応力分布である。なお、図5においては、図6に示すような矩形要素を用いた。

III 平板曲げ解析

3角形9自由度の平板曲げモデルとする。すなわち、3角形の各頂点に設定した節点において面外変位 w 、および面内直交二軸方向の勾配 w_x, w_y を節点変位としてとるのである。

要素内応力分布を線型と仮定すれば、要素内の応力分布 b^e は、節点における対応する応力値 b^e の関数として、(4)式の $[T]$ により、(15)式のように表わされる。

$$b^e = \{b_1^e \ b_2^e \ b_3^e\} \quad (13)$$

$$b_i^e = \{m_x \ m_y \ m_{xy}\}_{node \ i} \quad (14)$$

$$b^e = [T] b^e \quad (15)$$

要素内応力ベクトル b^e に対応する要素内歪ベクトル b^e は、 $b^e = [b_N] b^e$ で与えられ、従って、相補エネルギー関数 Π_{cb} は、

$$\Pi_{cb} = \sum_m \Pi_{cbm} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{cbm} &= \frac{1}{2} \int_{A_m} b^e T^T b^e dA - \int_{A_m} b^e U_B^T b^e ds \\ &= \frac{1}{2} b^e T^T [b_H] b^e - b^e U_B^T [b_Q] b^e \end{aligned} \quad (17)$$

ここで、 $[b_H] = \int_{A_m} [T]^T [b_N] [T] dA$, $[b_Q] = \int_{A_m} [b_L] [b_M] ds$, $b^e U_B = [b_L] b^e$, $b^e U_B = [b_M] b^e$ であり、 $b^e U_B$, $b^e U_B$ は、 $p^e U_B$, $p^e U_B$ と同様にして得られる。

Π_{cb} の停留条件より、(18)式を得る。要素節点変位 b^e に対応する節点力を b^e とすると、仮想仕事の原理から、(19)式を得る。その結果、要素剛性マトリックス $[b_K]$ が(20)式のように得られる。

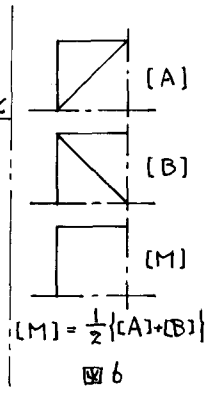
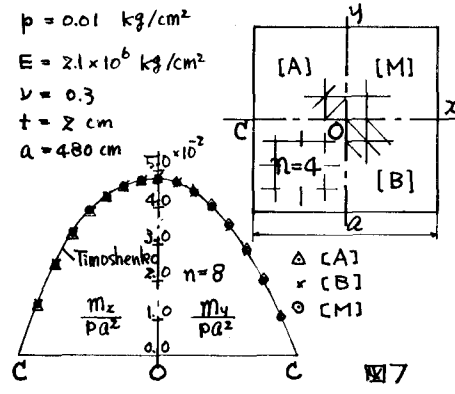
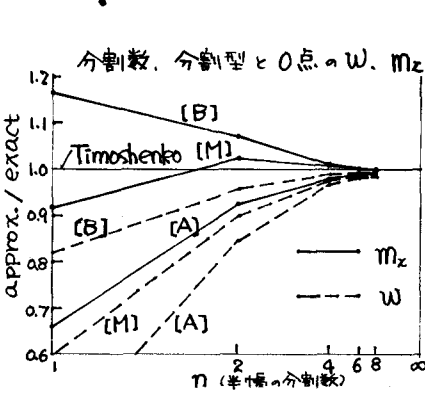
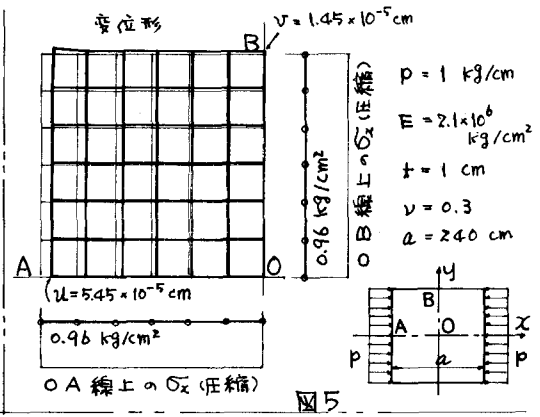
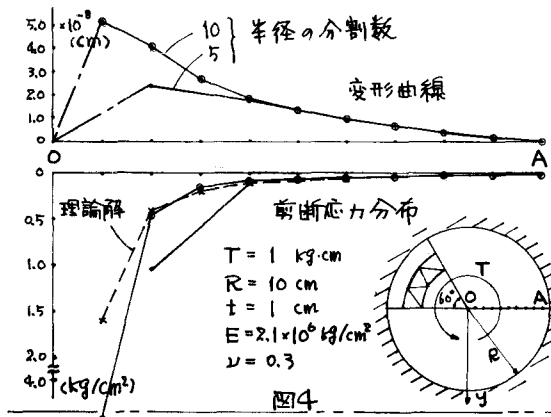
$$b^e = [b_H]^{-1} [b_Q] T^T b^e \quad (18)$$

$$\begin{aligned} (\delta b^e)^T b^e &= \int_{A_m} (\delta b^e)^T b^e dA \\ &= (\delta b^e)^T [b_H] b^e \\ &= (\delta b^e)^T [b_Q] [b_H]^{-1} [b_Q] T^T b^e \end{aligned} \quad (19)$$

$$b^e = [b_K] b^e \quad (20)$$

$$[b_K] = [b_Q] [b_H]^{-1} [b_Q] T^T \quad (21)$$

本モデルによる応用解析例を図7に示す。これは、周辺単純支持の等分布荷重を受けた正方形板の中央点におけるたわみと応力、および、中心線上の応力分布、を表わしたものである。



IV 立体解析

II, III で示したモデルを用いて、曲げ力と面内力とを同時に受ける立体板系の解析を行った。

立体解析における節点カベクトル $\{f\}$ 、節点

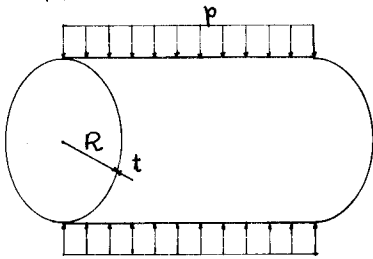
$$\{f\}^T = \{P_x, P_y, P_z, M_x, M_y, M_z\} \quad (22)$$

変位ベクトル $\{u\}$ は、(22), (23) 式の内容となる。こ

$$\{u\}^T = \{u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z\} \quad (23)$$

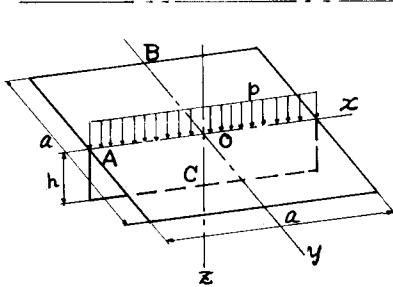
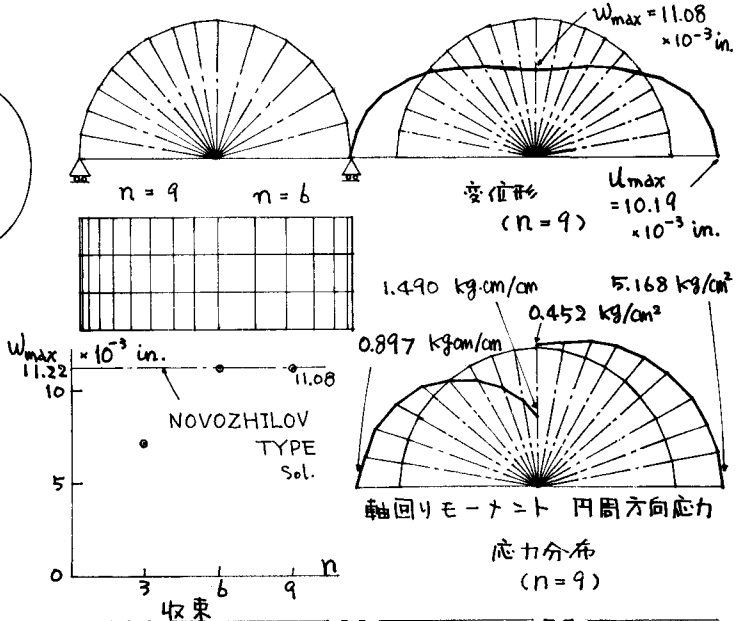
こに、 $\theta_x = w_y, \theta_y = -w_x$ である。

立体解析を行った結果を例示する。図8は無限円筒殻、図9はT型梁に、図に示すような線荷重を作用させたときの变形、および応力分布を表わしたものである。図8から、曲面構造の平板要素による折板近似解析が有効であることが認められる。なお、立体解析においては、図6の矩形要素 [1] を用いた。



- $p = 1 \text{ lb/in.}$
- $R = 4.953 \text{ in.}$
- $t = 0.094 \text{ in.}$
- $E = 10.5 \times 10^6 \text{ psi}$
- $\nu = 0.3125$
- $n: 90^\circ \text{ の分割数 (3, 6, 9)}$

図8



y 軸に平行な二辺を単純支持した T 型梁

- $a = 240 \text{ cm}$
- $h = 60 \text{ cm}$
- 板厚 = 2 cm
- リブ厚 = 3 cm
- $p = 1 \text{ kg/cm}$
- $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$
- $\nu = 0.3$

図9

