I-16　有限要素法による非定常粘性流れの定式化に関する考察

秋田大学　正員　○薄　木　征　三
秋田大学　学員　　工　藤　研　二

1. 緒　言　　非定常粘性流れの有限要素法による解析は Oden[1] らによって先駆的な研究がなされてきた。Oden は一貫してガラーキン法によって定式化を試みているが定式過程そのものにいくぶん問題を含んでおり，その後具体的な数値解析も示されていない。また彼の研究の集大成ともみられる近著[2] は熱粘弾性体の有限変位理論を含むきわめて広範な非線形現象の一般的な定式化を行っているが，非定常粘性流れの問題は取り扱われていない。

最近 P. F. Lemieux[3,4] は Local potential の概念を用いて粘性流体に関する変分原理を導いている。ただ残念なことに解法そのものは古典的な手法ー二次元流れ場において場全体としての流速分布を連続な関数で仮定し初期条件を用いて流れを定めるという意味でーによっているため物体背後の流れを求めるような場合には適用が困難である。

著者はこの変分原理を有限要素法を適用することによって実際的な問題に広く適用できる形に定式化を試みた。変位場との関係を明確にするため行列表示を用いた。さらに矩形断面内の非定常流れについての計算例を示す。

2. 非定常流れに関する変分原理

P. F. Lemieux の導いた変分原理の概要を以下に概説する。非圧縮粘性流体に関する N−S 方程式は

連続方程式　　$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \qquad \cdots\cdots (1)$$

運動方程式　　$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\rho u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \rho\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \qquad \cdots\cdots (2)$$

ここに ϕ は単位質量当りのポテンシャルである。ρ は密度。式(2)に $-\delta u_i$ を乗じ空間に固定された体積 V について積分する。すなわち

$$-\int_V \rho\frac{\partial u_i}{\partial t}\delta u_i\, dV = \int_V \rho u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\delta u_i\, dV + \int_V \rho\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\delta u_i\, dV + \int_V \frac{\partial p}{\partial x_i}\delta u_i\, dV - \int_V \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}\delta u_i\, dV \quad \cdots (3)$$

Gauss の定理を用いて体積積分を変換すれば

$$-\int_V \rho\frac{\partial u_i}{\partial t}\delta u_i\, dV = \int_V \left(-\rho u_j u_i \delta\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \tau_{ij}\delta\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - (p+\rho\phi)\delta\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right) dV + \int_A \left(\rho u_j u_i \delta u_i + (p+\rho\phi)\delta u_j - \tau_{ij}\delta u_i\right)\nu_j\, dA \quad \cdots (4)$$

式(4)に $u_i = u_i^0 + \delta u_i$ を代入する。u_i^0 は求めようとする停留値である。結果のみかくと

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\frac{\delta u_i \delta u_i}{2}\, dV = \delta\Big\{\int_V \Big(\rho\frac{\partial u_i^0}{\partial t}u_i - \rho u_i^0 u_j^0\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \tau_{ij}^0\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - (p+\rho\phi)^0\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\Big) dV$$
$$+ \int_A \Big(\rho u_j^0 u_i^0 u_i + (p+\rho\phi)^0 u_j - \tau_{ij}^0 u_i\Big)\nu_j\, dA\Big\} \equiv \delta F \quad \cdots\cdots (5)$$

ただし原論文では式(4)，(5)で体積積分内の $(p+\rho\phi)$，$(p+\rho\phi)^0$ の項は連続の式(1)によって消失していることに注意されたい。これは前述のように原著者は式(1)を満たすように流速

分布を場全体に連続な関数で仮定する方法によっているからであるが，有限要素法では流れ関数を導入する以外一般に式（1）を要素内いたるところで満たすことができないからである。
式（5）の両辺を時間 Δt について積分すれば

$$\frac{1}{2}\int_V \rho\,\delta u_i\,\delta u_i\,dV = \int_{\Delta t}\delta F\,dt \geqq 0 \qquad \therefore\ \delta F \geqq 0$$

よって付帯条件 $u_i = u_i^\circ$ のもとに $\delta F = 0$ とする F は最小値となる。再びサフィックス $^\circ$ のついている量は停留値であるから変分に無関係でありサフィックスのない量のみが変分になる。

3. 汎関数 F の行列表示

変位場との対応を明確にするため式（5）の F を行列表示してみる。関数内には未知量またはその微係数の2次式を含むため若干の操作を要する。次の行列を用いる。

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix},\quad \{e\} = \begin{Bmatrix} \partial u/\partial x \\ \partial v/\partial y \\ \partial w/\partial z \\ \partial u/\partial y + \partial v/\partial x \\ \partial v/\partial z + \partial w/\partial y \\ \partial w/\partial x + \partial u/\partial z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ e_{xy} \\ e_{yz} \\ e_{zx} \end{Bmatrix},\quad \{\tau\} = \begin{Bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix},\quad \{\nu\} = \begin{Bmatrix} \nu_x \\ \nu_y \\ \nu_z \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots (6)$$

すなわち，$\{f\}$ は速度ベクトル，$\{e\}$ は歪速度ベクトル，$\{\tau\}$ は粘性応力ベクトル $\{\nu\}$ は流体表面の法線ベクトル（方向余弦）である。F を（x, y, z）座標に展開し若干の操作を行えば

$$\begin{aligned} F = \int_V \Big\{ & \rho\{f\}^T\{f^\circ\} - \rho\{e\}^T\big([P]\{f^\circ\}[I_1] + [Q]\{f^\circ\}[I_2] + [R]\{f^\circ\}[I_3]\big)\{f^\circ\} \\ & + \{e\}^T\{\tau^\circ\} - (p+\rho\phi)^\circ\{e\}^T\{J\}\Big\}\,dV \\ & + \int_A \Big\{\rho\{f\}^T\{f^\circ\}\{\nu\}^T\{f^\circ\} + (p+\rho\phi)^\circ\{f\}^T\{\nu\} - \{f\}^T[S]\{\tau^\circ\}\Big\}\,dA \quad \cdots\cdots (7) \end{aligned}$$

ここに

$$[I_1] = [1\ \ 0\ \ 0],\quad [I_2] = [0\ \ 1\ \ 0],\quad [I_3] = [0\ \ 0\ \ 1],\quad \{J\} = [1\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^T$$

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},\quad [Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad [R] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad [S] = \begin{bmatrix} \nu_x & 0 & 0 & \nu_y & 0 & \nu_z \\ 0 & \nu_y & 0 & \nu_x & \nu_z & 0 \\ 0 & 0 & \nu_z & 0 & \nu_y & \nu_x \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (8)$$

式（7）において積分内オ1項は加速度の時間的変化による仕事，オ2項は加速度の対流項による仕事，オ3項は粘性マサツによるエネルギー散逸，オ4項は圧縮性による仕事（非圧縮では0）である。また表面積分内のオ1項は対流項による見かけの力がなす仕事，オ2項は圧力のなす仕事，オ3項は粘性応力のなす仕事であり，行列表示によって変位場との相違あるいは対応が明確に認識される。式（7）は非圧縮非ニュートン流体にも適用される。

4. 有限要素法による定式化

変位場における と同様に要素 V 内部の流速を節点値 $\{\delta\}$ によって表わす。以下ニュートン流体の場合について示す。μ を粘性係数とすると

$$\{f\} = [N]\{\delta\}^e,\quad \{e\} = [B]\{\delta\}^e,\quad \{\tau\} = \mu[D]\{e\} = \mu[D][B]\{\delta\}^e \cdots (9)$$

変位場と同様に $\{\delta\}^e$ は節点速度あるいはそれらの微係数などからなるベクトルである。以下簡単のため要素 e のサフィックスを除いておく。また $[D]$ マトリックスは次のようである。

$$[D]=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

式(9)を式(7)に代入すると

$$F=\{\delta\}^T\Big[\int_V\Big\{\rho[N]^T[N]\{\dot{\delta}^\circ\}-\rho[B]^T\big([P][N]\{\delta^\circ\}[I_1]+[Q][N]\{\delta^\circ\}[I_2]+[R][N]\{\delta^\circ\}[I_3]\big)[N]\{\delta^\circ\}$$
$$+\mu[B]^T[D][B]\{\delta^\circ\}-(p+\rho\phi)^\circ[B]^T\{J\}\Big\}dV$$
$$+\{\delta\}^T\int_A\Big(\rho[N]^T\{f^\circ\}\{\nu\}^T\{f^\circ\}+(p+\rho\phi)^\circ[N]^T\{\nu\}-[N]^T[S]\{T^\circ\}\Big)dA \quad \cdots\cdots (10)$$

ここで $\{\delta\}$ の各成分は独立ではなく式(1)を満たすものでなければならない。式(1)をベクトルでかくと

$$\{e\}^T\{J\}=0. \qquad (11)$$

連続の式(11)を要素V内で平均的に満足するようにすれば，式(9)を式(11)に代入して

$$\{\delta^\circ\}\cdot\int_V[B]^T\{J\}dV=0. \qquad (12)$$

よって式(10)の体積積分の第4項 $(p+\rho\phi)^\circ$ は条件付変分問題のラグランジュ乗数に相当するものとして明確に把握される。 $\delta F=0$ をとり $\{\delta^\circ\}=\{\delta\}$ とおけば

$$\int_V\rho[N]^T[N]dV\cdot\{\dot{\delta}\}-\int_V\rho[B]^T\big([P][N]\{\delta\}[I_1]+[Q][N]\{\delta\}[I_2]+[R][N]\{\delta\}[I_3]\big)[N]dV\{\delta\}$$
$$+\int_V\mu[B]^T[D][B]dV\cdot\{\delta\}-\int_V(p+\rho\phi)[B]^T\{J\}\cdot dV$$
$$=-\int_A\rho[N]^T\{f\}\{\nu\}^T\{f\}dA-\int_A(p+\rho\phi)[N]^T\{\nu\}dA+\int_A[N]^T[S]\{T\}dA \quad \cdots (13)$$

式(12)の°をとってかくと

$$\{\delta\}\cdot\int_V[B]^T\{J\}dV=0. \quad \cdots (14)$$

式(13)，(14)が基本方程式となる。ただし式(13)の左辺第4項の $(p+\rho\phi)$ はV内で一定である。式(13)の右辺は変位問題における外力に相当するがこの場合は要素表面での“流束”と解される(Momentum Flux)。また式(13)，(14)をテンソルで表わすこともできる。あるいは式(5)にもどって $u_i=\psi^N(x_1,x_2,x_3)U_{Ni}$ (ψ は形状関数, U_{Ni} は節点Nでの速度)から出発してもよいが紙面の都合で省略する。

著者の目的は後流の解析にあるがこの場合には次の無次元量(Uは遠方での流速)

$$x=x'D,\quad y=y'D,\quad z=z'D,\quad \{\delta\}=\{\delta'\}\cdot U,\quad \{T\}=\{T'\}\rho U^2,$$
$$t=t'D/U,\quad p=p'\rho U^2 \quad \rho,\ \mu=\text{一定},\quad \phi=0,\quad Re=UD/\nu$$

とおけば式(13)，(14)は各々無次元化されて

$$\{\delta\}\cdot\int_V[B]^T\{J\}dV=0. \quad \cdots (15)$$

および

$$\int_V [N]^T[N]dV\cdot\{\dot{\delta}\} - \int_V [B]^T\left([p][N]\{\delta\}[I_1] + [Q][N]\{\delta\}[I_2] + [R][N]\{\delta\}[I_3]\right)[N]dV\cdot\{\delta\}$$

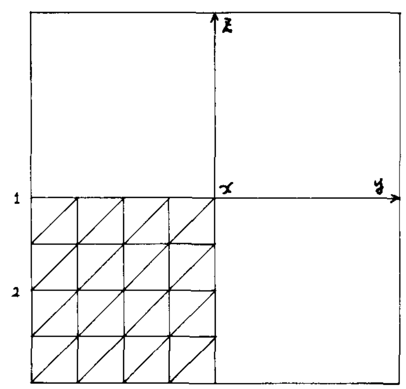
$$+\frac{1}{Re}\int_V [B]^T[D][B]dV\cdot\{\delta\} - p\int_V [B]^T\{I\}dV$$

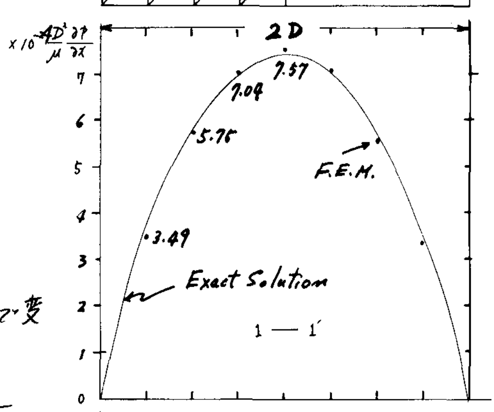
$$= -\int_A [N]^T\{f\}\{\delta\}^T\{f\}dA - \int_A p[N]^T\{\nu\}dA + \int_A [N]^T[S]\{T\}dA \quad \cdots\cdots \quad (16)$$

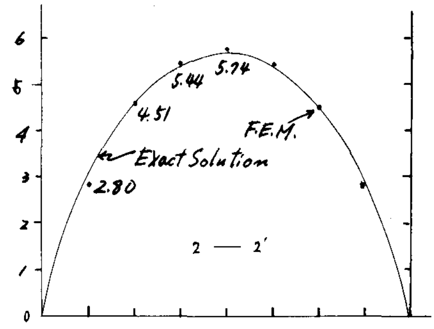
ただし、′の記号はすべて除いてある。すなわち $[N]=[N']$, $[B]=[B']$, $dV=dV'$, $dA=dA'$, $p=p'$, $\{\delta\}=\{\delta'\}$, $\{T\}=\{T'\}$ の意味である。式(16)は有限要素法による定式化においてもレイノルズ数 Re の効果を明確に示している。

以上の3次元流れの基本式(13),(14)または(15),(16)において表面積分の項は変位問題と同様に、要素間の流速の連続性が保障される形状関数を用いるならば互いに打消し合い、流れ場全体の表面の値と物体表面での値のみが残る。後者は求めんとする圧力,応力を与える。

5. 圧力が変動する非定常管路流れ







右図上は矩形管路断面を示す。Re が小さく層流状態であるとする。式(11)の連続の式は自動的に満たされる($e_{xx}=e_{yy}=e_{zz}=e_{yz}=0$, $e_{xy}, e_{zx}\neq 0$)。また非線形項はすべて消失する例である。要素内で管軸(x軸)方向の流速変化を一次式で表わす。式(13)より結果のみかくと

$$\rho[M]\{\dot{\delta}\}+\mu[C]\{\delta\}=\{P\} \quad \cdots\cdots \quad (17)$$

ここに

$$[C]=\frac{D^2}{4\Delta}\begin{bmatrix} b_i^2+c_i^2 & b_ib_j+c_ic_j & b_ib_m+c_ic_m \\ & b_j^2+c_j^2 & b_jb_m+c_jc_m \\ & & b_m^2+c_m^2 \end{bmatrix}$$

$$[M]=\frac{\Delta}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \quad \{P\}=-\frac{\partial p(t)}{\partial x}\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix}\cdot\frac{\Delta}{3}$$

であり、$b_i=z_j-z_m$, $c_i=y_m-y_j$ etc. である。

右図下の2つの図は圧力勾配が時間的にステップ関数で変化したときの定常状態に達した分布である。

1) J. T. Oden : Finite Element Analogue of Navier-Stokes Eq., ASCE, EM3, Aug. 1970

2) J. T. Oden : Finite Elements of Nonlinear Continua, McGraw-Hill, Book. Co. 1972

3) P. F. Lemieux et al : Variational Principle in Fluid Dynamics, ASCE, EM6, Dec. 1970

4) P. F. Lemieux : Variational Principle in Fluid Dynamics. (Errata), ASCE, EM5, March, 1971