

## - 直接法と差分法の比較 -

鹿島建設株式会社 正会員 佐々木 猛

" " 今井 貫爾

" " ○成田 明知

## I はじめに

前回、著者等は二次元非定常熱伝導問題を差分手法と併せた有限要素法で解析しその報告をした。そこでは、基礎方程式の時間項のみを中央差分公式で展開して漸化式として取扱ったが、今回は時間項を含めて有限要素化をはかり、従来解析手法によるものと今回のものとに、どの様な差異があるかを報告する。

## II 直接法による解析

二次元非定常熱伝導の問題を考えることにする。さすれば基礎方程式は、

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (k_{x_1} \frac{\partial T}{\partial x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (k_{x_2} \frac{\partial T}{\partial x_2}) + q = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

ここに、 $x_1, x_2$  は直交座標、 $k_{x_1}, k_{x_2}$  はそれぞれ  $x_1$  方向、 $x_2$  方向の熱伝導率、 $T$  は温度、 $q$  は単位時間に単位面積から発生する熱量、 $\rho$  は物体の密度、 $C$  は物体の比熱、 $t$  は時間である。

さて①式に適当な境界条件を与えて解けば良い訳であるが、考えられる境界条件は次の三つになる

- (a) 境界上で温度が与えられている場合
- (b) 境界上で熱交換のある場合
- (c) 両者が同時に存在している場合

この中の (a), (b) の定式化を行なえば、(c) はそれらを組合せたものと考えられるので、以下においては (a), (b) の有限要素化を考える。

①式は変分原理により次の積分方程式と等価である。

$$\int_0^\tau \int_\Omega (\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_1} (k_{x_1} \frac{\partial T}{\partial x_1}) - \frac{\partial}{\partial x_2} (k_{x_2} \frac{\partial T}{\partial x_2}) - q) \delta T d\Omega dt = 0 \quad (2)$$

ここに、 $\Omega$  は解の対象とする領域を表わす。 $\tau$  は考えている時刻、 $\delta T$  は温度の第一変分である。②式の被積分関数の第二、三項を部分積分すると、次の様に書き直すことができる。

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_\Omega (\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - q) \delta T d\Omega dt - \int_0^\tau \int_\Gamma k_{x_1} \frac{\partial T}{\partial x_1} \delta T dx_2 dt \\ & + \int_0^\tau \int_\Omega k_{x_1} \frac{\partial T}{\partial x_1} \frac{\partial (\delta T)}{\partial x_1} d\Omega dt - \int_0^\tau \int_\Gamma k_{x_2} \frac{\partial T}{\partial x_2} \delta T dx_1 dt \\ & + \int_0^\tau \int_\Omega k_{x_2} \frac{\partial T}{\partial x_2} \frac{\partial (\delta T)}{\partial x_2} d\Omega dt = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

ここに  $\Gamma$  は領域  $\Omega$  の閉曲線である。さて、その  $\Gamma$  に沿っての座標  $S$  をとれば、 $\Gamma$  の単位法線 Vector の成分を  $n_{x_1}, n_{x_2}$  として  $dx_1 = n_{x_2} ds, dx_2 = n_{x_1} ds$  の関係があるから、さらに③式は

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_\Omega (\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - q) \delta T d\Omega dt - \int_0^\tau \int_\Gamma (k_{x_1} \frac{\partial T}{\partial x_1} n_{x_1} + k_{x_2} \frac{\partial T}{\partial x_2} n_{x_2}) \delta T ds dt \\ & + \int_0^\tau \int_\Omega (k_{x_1} \frac{\partial T}{\partial x_1} \frac{\partial (\delta T)}{\partial x_1} + k_{x_2} \frac{\partial T}{\partial x_2} \frac{\partial (\delta T)}{\partial x_2}) d\Omega dt = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

となる。④式の二項目は周辺に沿っての積分であるから、有限要素展開する時には境界上の要素だけにきいてくる項であって、一般要素に対してはこの項は落してさしつかえない。即ち、

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_\Omega (k_{x_1} \frac{\partial T}{\partial x_1} \frac{\partial (\delta T)}{\partial x_1} + k_{x_2} \frac{\partial T}{\partial x_2} \frac{\partial (\delta T)}{\partial x_2}) d\Omega dt \\ & = \int_0^\tau \int_\Omega (q - \rho C \frac{\partial T}{\partial t}) \delta T d\Omega dt \end{aligned} \quad (5)$$

を有限要素展開すれば良い。さてここで、④式第二項の被積分関数を、

$$k_{x_1} \frac{\partial T}{\partial x_1} n_{x_1} + k_{x_2} \frac{\partial T}{\partial x_2} n_{x_2} = q_n \quad (6)$$

とかけば、 $q_n$ は明らかに境界上の法線方向の単位長さ、単位時間当りに流出入する熱量を与えているので、(b)のタイプの境界条件に相当している。

⑤式を有限要素化するに当って、簡単のために図1の様な三角形要素を考える。局所座標系として三角形の重心をとり、それに対する各節点の座標を  $x_i^j$  と表わすことにする。ここに  $x_i^j$  は、j 節点の  $x_i$  軸に沿う座標である ( $i=1, 2; j=1, 2, 3$ )。図1は解の対象領域に対する空間的な成分であるが、ここではもう一つ、時間軸に対しても有限要素化を行う。つまり時間軸に対しても一定刻み  $\tau$  で有限要素化するものとする。この時の形状関数としては、線型の

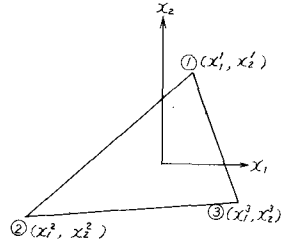


図1 三角形要素

$$T = (a_1 + a_2 x_1 + a_3 x_2) + (a_4 + a_5 x_1 + a_6 x_2) t \quad (7)$$

を選ぶことにする。ここに  $a_1 \sim a_6$  は、節点の初期温度と  $\tau$  時間だけ経過した時の節点温度とから決める係数である。全節点の初期温度に上添字 0 を付けて示せば、各節点に対応して  $(T_1^0, T_2^0, T_3^0)$  とかけそれから経過時間  $\tau$  後の節点温度を  $\tau$  を付けて示すことにすれば、 $(T_1^\tau, T_2^\tau, T_3^\tau)$  とかける。さすれば⑦式は内挿関数  $\Phi_1 \sim \Phi_6$  を使用して、

$$T = \Phi_1 T_1^0 + \Phi_2 T_2^0 + \Phi_3 T_3^0 + \Phi_4 T_1^\tau + \Phi_5 T_2^\tau + \Phi_6 T_3^\tau \quad (8)$$

となる。 $\Phi_1 \sim \Phi_6$  の具体的な内容は、Matrix 形でかくと、

$$\begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ \Phi_6 \end{Bmatrix}^T = \begin{Bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ t \\ x_1 t \\ x_2 t \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 1 & x_1^1 & x_2^1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_1^2 & x_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_1^3 & x_2^3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_1^1 & x_2^1 & \tau & x_1^1 \tau & x_2^1 \tau \\ 1 & x_1^2 & x_2^2 & \tau & x_1^2 \tau & x_2^2 \tau \\ 1 & x_1^3 & x_2^3 & \tau & x_1^3 \tau & x_2^3 \tau \end{Bmatrix}^{-1} \quad (9)$$

ただし T は転置 Vector,  
-1 は逆 Matrix を表わす

⑧式は、要素内の任意点の温度が節点座標と節点温度で表わされることを示しているのので、これを用いて⑤式の各項を評価する。まず温度変分に関する微分を計算するために、⑧式より

$$\partial T = \Phi_4 \partial T_1^\tau + \Phi_5 \partial T_2^\tau + \Phi_6 \partial T_3^\tau \quad (10)$$

これを  $x_1, x_2$  で微分し、簡単のため添字  $k$  ( $k=1, 2$ ) で表わすと、

$$\frac{\partial \partial T}{\partial x_k} = \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_k} \partial T_1^\tau + \frac{\partial \Phi_5}{\partial x_k} \partial T_2^\tau + \frac{\partial \Phi_6}{\partial x_k} \partial T_3^\tau \quad (k=1, 2) \quad (11)$$

さらに⑧式を使って  $\partial T / \partial x_1, \partial T / \partial x_2$  を計算すると

$$\frac{\partial T}{\partial x_k} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_k} T_1^0 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_k} T_2^0 + \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_k} T_3^0 + \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_k} T_1^\tau + \frac{\partial \Phi_5}{\partial x_k} T_2^\tau + \frac{\partial \Phi_6}{\partial x_k} T_3^\tau \quad (k=1, 2) \quad (12)$$

時間  $t$  での微分は同様に⑧式より

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_4}{\partial t} T_1^0 + \frac{\partial \Phi_5}{\partial t} T_2^0 + \frac{\partial \Phi_6}{\partial t} T_3^0 + \frac{\partial \Phi_4}{\partial t} T_1^\tau + \frac{\partial \Phi_5}{\partial t} T_2^\tau + \frac{\partial \Phi_6}{\partial t} T_3^\tau \quad (13)$$

以上の準備が出来たので、⑤式に⑩, ⑪, ⑫, ⑬, を代入して若干の演算ののち  $\partial T_1^\tau, \partial T_2^\tau, \partial T_3^\tau$ , について整理する。ここで、いかなる時刻  $\tau$  についても⑤式は成立しなければならぬから、結局、次の様な形となる。

$$\begin{pmatrix} K_{44} & K_{54} & K_{64} \\ K_{45} & K_{55} & K_{65} \\ K_{46} & K_{56} & K_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^\tau \\ T_2^\tau \\ T_3^\tau \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix} - \begin{pmatrix} K_{14} & K_{24} & K_{34} \\ K_{15} & K_{25} & K_{35} \\ K_{16} & K_{26} & K_{36} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^0 \\ T_2^0 \\ T_3^0 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

⑭式をかきなおせば、

$$[K_\tau] \{T^\tau\} = \{\bar{Q}\} - [K_0] \{T_0\} \quad (15)$$

$[K_\tau]$  を時刻  $\tau$  の時の要素熱伝導 Matrix,  $\{\bar{Q}\}$  を外熱束 Vector と呼ぶ。 $\{\bar{Q}\}$  は、一時刻前の熱伝導 Matrix  $[K_0]$  と節点温度  $\{T_0\}$ , 発熱 Vector  $\{Q\}$  とから計算される。

ここで⑮式の熱伝導 Matrix と発熱 Vector は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} K_{ij} &= \int_0^\tau \int_\Omega (k_{x1} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_1} + k_{x2} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_2} + \rho C \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} \Phi_j) d\Omega dt \\ Q_j &= \int_0^\tau \int_\Omega q \Phi_j d\Omega dt \end{aligned} \right\} \quad (i=1\sim 6, j=4\sim 6) \quad (16)$$

例えば,  $K_{54}$  は, ⑮で  $i=5$ ,  $j=4$  として

$$K_{54} = \int_0^\tau \int_\Omega (k_{x1} \frac{\partial \Phi_5}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_1} + k_{x2} \frac{\partial \Phi_5}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_2} + \rho C \frac{\partial \Phi_5}{\partial t} \Phi_4) d\Omega dt$$

を計算してやれば良い。

以上で、要素の熱伝導 Matrix と外熱束 Vector との関係を導びいた。従来の熱伝導 Matrix と異なる点は、その中に要素座標のみならず、時間刻み  $\tau$  を含んでいる点である。

さて今少し、⑮の展開を進めるために、⑨式の右辺第二項の逆 Matrix の  $i$  行,  $k$  列の成分を  $X_{ik}$  ( $i=1\sim 6$ ,  $k=1\sim 6$ ) で表わすと、 $\Phi_i$  はただちに次の形となる。

$$\Phi_i = X_{i1} + x_1 X_{2i} + x_2 X_{3i} + t X_{4i} + x_1 t X_{5i} + x_2 t X_{6i} \quad (i=1\sim 6) \quad (17)$$

要素熱伝導 Matrix を求めたのと同じ様に、⑮より  $\partial \Phi / \partial x$ ,  $\partial \Phi / \partial t$  を準備して⑮に代入し、要素領域と時間領域にわたって積分を実行すると、 $K_{ij}$ ,  $Q_j$  が以下の様になる。

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \Delta \tau [k_{x1} \{X_{2i} X_{2j} + \frac{1}{2} (X_{2i} X_{6j} + X_{5i} X_{2j}) \tau + \frac{1}{3} X_{5i} X_{5j} \tau^2\} \\ &\quad + k_{x2} \{X_{3i} X_{3j} + \frac{1}{2} (X_{3i} X_{6j} + X_{6i} X_{3j}) \tau + \frac{1}{3} X_{6i} X_{6j} \tau^2\} \\ &\quad + \rho C \{X_{4i} (X_{1j} + \frac{1}{2} X_{4j} \tau) + (S_1 X_{5i} + S_3 X_{6i}) (X_{2j} + \frac{1}{2} X_{5j} \tau) \\ &\quad + (S_3 X_{5i} + S_2 X_{6i}) (X_{3j} + \frac{1}{2} X_{6j} \tau)\}] \end{aligned}$$

$$Q_j = q \Delta \tau (X_{1j} + \frac{1}{2} \tau X_{4j}) \quad (i=1\sim 6, j=4\sim 6) \quad (18)$$

ここで、 $i$  は 1 から 6 まで変化し、 $j$  は 4 から 6 まで変化する添字である。また  $\Delta$  は対象とする三角形要素の面積、 $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  は次のように節点座標で定義される値である。

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{12} \{(x_1^1)^2 + (x_1^2)^2 + (x_1^3)^2\}, & S_2 &= \frac{1}{12} \{(x_2^1)^2 + (x_2^2)^2 + (x_2^3)^2\} \\ S_3 &= \frac{1}{12} \{x_1^1 x_2^1 + x_1^2 x_2^2 + x_1^3 x_2^3\} \end{aligned}$$

したがって⑮の各項成分の具体的な形は、例えば  $K_{64}$  は、⑮で  $i=6$ ,  $j=4$  とおいて

$$\begin{aligned} K_{64} &= \Delta \tau [k_{x1} \{X_{26} X_{24} + \frac{1}{2} (X_{26} X_{54} + X_{56} X_{24}) \tau + \frac{1}{3} X_{56} X_{54} \tau^2\} \\ &\quad + k_{x2} \{X_{36} X_{34} + \frac{1}{2} (X_{36} X_{64} + X_{66} X_{34}) \tau + \frac{1}{3} X_{66} X_{64} \tau^2\} \\ &\quad + \rho C \{X_{46} (X_{14} + \frac{1}{2} X_{44} \tau) + (S_1 X_{56} + S_3 X_{66}) (X_{24} + \frac{1}{2} X_{54} \tau) \\ &\quad + (S_3 X_{56} + S_2 X_{66}) (X_{34} + \frac{1}{2} X_{64} \tau)\}] \end{aligned}$$

の様に求められる。

以上で、要素の熱伝導 Matrix 成分、外熱束 Vector 成分が得られたので、これを対象とする領域

内の全要素にわたって通常の有限要素法のテクニックにより重ね合せれば、⑬式は

$$[K_{\tau}^*] \{T_{\tau}^*\} = \{\bar{Q}^*\} \quad (13)$$

となり、 $\tau$  時刻の全節点の温度  $\{T_{\tau}^*\}$  は、全体の熱伝導 Matrix  $[K_{\tau}^*]$  と全体の外熱束 Vector の多元連立方程式の解として求めることが出来る。

ここで、境界条件について再考してみると、(a) 境界上で温度が定まっている場合には、⑬式で特定の境界上の節点がいつも同じ温度をもつように強制的に温度をわりつけられれば良い。一方、(b) 境界上で熱交換のある場合には、④式の第二項を⑥によって評価し、境界からの熱出入量を等価節点熱流束に変換し、外熱束 Vector に加算すれば良い。境界に沿っての線積分に注意し熱伝導 Matrix や、外熱束 Vector を求めたのと同じ手順で計算すると次の結果が得られる。

$$I_j = q_n \tau [F_1 (X_{1j} + \frac{1}{2} \tau X_{4j}) + F_2 (X_{2j} + \frac{1}{2} \tau X_{5j}) + F_3 (X_{3j} + \frac{1}{2} \tau X_{6j})] \quad (14)$$

ここで、 $j$  は 4, 5, 6 をとる。また  $q_n$  は要素境界に出入する単位長さ、単位時間あたりの熱量である。図 2 のように、熱交換のある境界の辺と  $x_1$  軸のなす角を  $\theta$  とすれば、⑭式の  $F_1, F_2, F_3$  はそれぞれ次の様に与えられる。  $F_1 = l$  (辺の長さ)

$$F_2 = \frac{1}{2 \cos \theta} [(x_1^2)^2 - (x_1^1)^2], F_3 = \frac{1}{2 \sin \theta} [(x_2^2)^2 - (x_2^1)^2]$$

$q_n$  は、領域内外の温度差によって与えられると考え、温度差 1℃ 当りの熱移動量を表わす熱伝達率  $\alpha$  によって次の様にした。

$$q_n = \alpha (T_o - T_i) \quad (15)$$

ここで、 $T_o$  は領域外の温度、 $T_i$  は領域内の温度である。

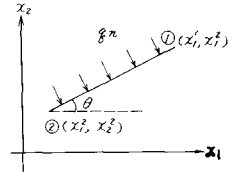


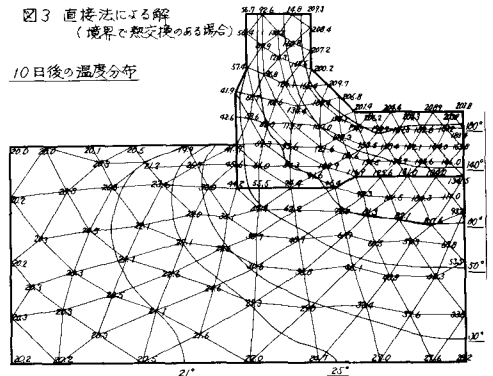
図 2 境界での熱交換

### III 数値計算例

図 3 の、基礎地盤を含めた concrete-tank 隅角部の非定常二次元温度分布の計算例を示す。tank内には 200℃ の液体が流れ、外気温は 20℃ である。熱伝導率は concrete 2.0, 地盤 15Kcal/mh℃ である。また比熱は concrete 0.2, 地盤 0.5 Kcal/kg℃, 単位体積重量は concrete 2400, 地盤 1600kg/m³ である。熱伝達率は、液体と concrete の間では 80, concrete と空気の間では 10kcal/m²h℃ とした。(a) と (b) の境界条件について、まったく同一条件で直接解と差分解を比較した。詳しい結果は当日発表するが、図 3 に直接法による 10 日後の温度分布だけを載せた。

### IV むすび

- i) 直接法は時間刻みを変化し易いので、長時間の追跡計算に有利である。
- ii) 直接法の計算値は、差分法に比して時間刻みに影響されにくい、立ち上りは振動する。
- iii) 直接法の境界温度は、領域外の温度より少し高めで急速に安定するので、立ち上りの温度勾配は差分法より急になり、この傾向は持続して全体に高めの温度分布を与えるようである。



<参考文献> J. T. Oden "The Finite Element Method in Fluid Mechanics" 1971

佐々木, 今井, 杉岡 "拡散問題への FEM によるアプローチについて" 土木学会年次講演集 1971