

1. はじめに

工学における重要な問題として時間変数を含む場合の解析がある。有限要素法を用いてこの種の問題を解析する場合、一般には時間変数を分離し、空間において有限要素モデルを組み立て、有限要素解析に対する支配方程式として時間に関するマトリックス微分方程式を導びき、これを時間について有限差分法により計算する場合が多い。また時間と空間の両者について有限要素モデルを組み立てる方法が提案されているが、実際に解析された例は少なく、かつその例も要素モデルが時間と空間に分離された型のいわゆる“可分”タイプのものだけである。可分タイプの要素モデルを用いる場合、有限要素解析の支配方程式は時間方向に対してバンド中のせまい大型連立方程式となり、その解析は比較的容易である。しかし、この場合には時間方向に対して有限要素法の利点(モデルの任意性)を失ってしまう。また、ある種の補間関数を用いた場合、その支配方程式は有限差分法から導びかれたものと同じとなる。

一方、任意のいわゆる“完全”タイプの場合、その支配方程式は一般の大型連立方程式となるが、これは時間方向に部分構造法を用いることにより、現象に応じた有限要素モデルの効率良い解析の可能性を持つ。ここでは完全タイプの有限要素モデルについて、その支配方程式を示すとともに、一次元波動方程式に対する解析例を示す。

2. 一般論

Odenにより一般の非線形作用素方程式に対する有限要素解析のための定式が行われているが、ここでは時間依存場に限定して有限要素解析の定式を述べる。

2.1. 時間依存場における支配方程式

ここでは次の形の方程式を考える。

$$\mathcal{K}(r) = R \quad (1)$$

上式で \mathcal{K} は線形または非線形の作用素であり、 $r = r(x^1, x^2, x^3, t)$ はノルム線形空間 \mathcal{V} の1つの元であり、4次元ユークリッド空間 E^4 のある開領域 M とその境界 ∂M において定義された関数であり、 $R = R(x^1, x^2, x^3, t)$ は他の(または同一の)ノルム空間 \mathcal{U} の1つの元である。従って、 \mathcal{K} は \mathcal{V} から \mathcal{U} への作用素であり、次のように表わす。

$$\mathcal{K} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U} \quad (2)$$

なお一般には(1)式に加え、境界 ∂M で境界条件が課せられる。

2.2 有限要素解析のための定式

(1)式における作用素 \mathcal{K} が線形の場合、変分法を用いて有限要素解析のための定式が可能であるが、ここでは非線形の場合にも適用できるGalerkin法を用いて定式を行う。

まず関数 r の定義域 M は有限要素モデル \bar{M} により近似されたものとし、 \bar{M} を構成する部分

領域 (有限要素) の集合 M^* は次の写像により与えられる。

$$\alpha: \bar{M} \rightarrow M^* \quad (3)$$

ただし, $M^* = \bigcup_{i=1}^e m_i$ であり, e は \bar{M} を構成する有限要素の総数を表わし, m_i は要素 i の領域を表わす。次に関数 r はある要素 m_i においては要素を構成する節点での値 $P_{(i)}^j$ ($j=1 \sim p$: p は要素節点総数) で次のように一意的に表わされるものとする。

$$\bar{r}_{(i)} = N_j^{(i)} P_{(i)}^j \quad (4)$$

ここで $N_j^{(i)}$ は 4 次元ユークリッド空間における変 (X^1, X^2, X^3, t) の関数であり, 補間関数と呼ぶ。補間関数が次の形で空間変数 (X^1, X^2, X^3) と時間変数 (t) の積で表わされる場合に, ここでは "可分" タイプと呼ぶことにする。

$$N_j^{(i)} = N_{SL}^{(i)}(X^1, X^2, X^3) N_{tL_j}^{(i)}(t) \quad (5)$$

上式で添字 L は空間方向の節点数だけ加算するものとする。次に Galerkin 法を適用するにあたり残差を次のように定義する。

$$E_{(i)} = \mathcal{K}^{(i)}(\bar{r}_{(i)}) - R^{(i)} \quad (6)$$

ここで $\mathcal{K}^{(i)}$ は \mathcal{K} の定義域を m_i に限定したものである。Galerkin 法は次のようになる。

$$\langle E_{(i)}, N_j^{(i)} \rangle = \int_{m_i} E_{(i)} N_j^{(i)} dm_i = 0 \quad (7)$$

上式に (6) 式を代入することにより次式が得られる。

$$k_{Lj}^{(i)}(P_{(i)}^j) - P_L^{(i)} = 0 \quad (8)$$

ただし

$$k_{Lj}^{(i)}(P_{(i)}^j) = \int_{m_i} \mathcal{K}^{(i)}(N_j^{(i)} P_{(i)}^j) N_L^{(i)} dm_i \quad (9)$$

$$P_L^{(i)} = \int_{m_i} R^{(i)} N_L^{(i)} dm_i \quad (10)$$

(8) 式はマトリックス型式で書くと次のようになる。

$$k P = P \quad (11)$$

領域 \bar{M} に対しては構造解析の場合と同様に組み立てることができ, 次のようになる。

$$K_{jL}(r^L) - R_j = 0 \quad (12)$$

ただし

$$K_{jL}(r^L) = \sum_{i=1}^e a_j^{(i)} k_n^{(i)}(a_L^{(i)} r^L) \quad (13)$$

$$R_j = \sum_{i=1}^e a_j^{(i)} P_n^{(i)} \quad (14)$$

であり, $a^{(i)}$ は領域 \bar{M} から m_i への写像である。(12) 式が有限要素解析に対する支配方程式であり, マトリックス型式では次のようになる。

$$K r = R \quad (15)$$

ただし,

$$K = a^T k a \quad ; \quad R = a^T P \quad (16)$$

3. 解析例

ここでは具体的な例として次の1次元波動方程式をとりあげる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = f(t) \quad (17)$$

3.1. 有限要素モデル

ある要素(i)に着目し、未知関数を次のように仮定する。

$$\bar{\phi}^{(i)}(x, t) = N_j^{(i)} \rho_{(i)}^j \quad (18)$$

2節に従って Galerkin 法を用いると

$$\int_{m_i} N_k^{(i)} \left(\frac{\partial^2 \bar{\phi}^{(i)}}{\partial x^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 \bar{\phi}^{(i)}}{\partial t^2} - f(t) \right) dm_i = 0 \quad (19)$$

未知関数の定義域は (x, t) 面であるので部分積分法を用いることにより次のようになる。

$$k_{j\ell}^{(i)} \rho_{(i)}^\ell = f_j^{(i)} \quad (20)$$

ただし、

$$k_{j\ell}^{(i)} = a_{j\ell}^{(i)} - \alpha^2 b_{j\ell}^{(i)} \quad (21)$$

$$a_{j\ell}^{(i)} = \iint_{t,x} \left(\frac{\partial N_j^{(i)}}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_\ell^{(i)}}{\partial x} \right) dx dt \quad (22)$$

$$b_{j\ell}^{(i)} = \iint_{t,x} \left(\frac{\partial N_j^{(i)}}{\partial t} \cdot \frac{\partial N_\ell^{(i)}}{\partial t} \right) dx dt \quad (23)$$

$$f_j^{(i)} = - \iint_{t,x} N_j^{(i)} f(t) dx dt + \oint N_j^{(i)} \left(\frac{\partial N_\ell^{(i)}}{\partial x} l_x - \alpha^2 \frac{\partial N_\ell^{(i)}}{\partial t} l_t \right) ds \rho_{(i)}^\ell \quad (24)$$

であり、(24)式の右辺第2項は境界においてのみ考慮すればよい。

3.2. 計算例

ここでは図1に示す一様棒の振動をとりあつかう。ただし $\alpha = \sqrt{\rho/E}$ である。

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0$$

(A) 境界条件

$$u_x(0, t) = U_1(t) = \sin \omega t ; u_x(l, t) = 0$$

(B) 初期条件

$$u_x(x, 0) = (\partial u_x / \partial t)_{t=0} = 0$$

(C) 数値データ

$$E = 2.05939 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2, \rho = 8000 \text{ kg/m}^3$$

$$l = 3750 \text{ m}, \omega = \pi/4$$

(D) 有限要素

計算にあたって使用した要素モデルを図2に示すが、その変位仮定は次のとおりである。

$$(a) \quad u_x = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 t$$

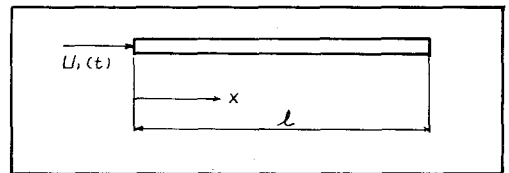


図1 一様棒

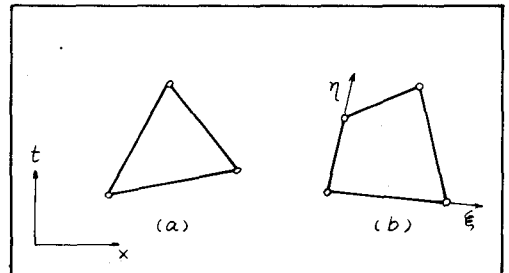


図2 要素モデル

$$(b) \quad u_x = \beta_1 + \beta_2 \xi + \beta_3 \eta + \beta_4 \xi \eta$$

(E) 有限要素モデル化

計算に使用したモデルは次のとおりである。

$$(a) \quad \Delta t = 0.5 \quad \Delta X = l/40$$

$$(b) \quad \Delta t = 1.0 \quad \Delta X = l/80$$

なお (a) として (a) のモデルで $t=4.0 \text{ sec}$ のとき、 $u_x=0$ とおいた。また (b) のモデルでは x, t が ξ, η と平行になるように理想化したので、2 節の定義によりこれは“可分”タイプの要素である。

(F) 計算結果

図3に $t=2.0 \text{ sec}$ のときの変位状態を示し、図4には $x=0.5l$ における変位の時間変化を表わす。また、図5には $t=2.0 \text{ sec}$ のときの静的変位と動的変位の差を表わす。

4. 考察

図3・4においては有限要素解析と理論解はほぼ一致するが、図5も着目するとバラツキが見られる。これは時間方向に対する有限要素モデルに起因すると考えられる。また、理論解において $u_x = g(x) \sin \omega t$ なる仮定のもとに解析されていることに由来するであろう。現在、モデルと精度に関して明確な関係は得られていないが、これは今後の解析例を増やすことにより把握できると思う。しかし、この解析にあたり、数値計算上の困難さにはしばしば遭遇し、安定性の検討が大きな問題として残っている。将来これらが解決されることにより、部分構造法などと結びつけ、汎用な解析が可能となる。

5. 参考文献

- (1) J.H. Argyris 他3名 "Some Aspects of Finite Element Techniques" ISD-ISSC, 1969
- (2) 森繁 他2名 "有限要素法による初期値問題の解法" 第26回土木学会年次学術講演会, 1971
- (3) O.C. Zienkiewicz "The Finite Element Method in Engineering Science" McGraw-hill, 1971
- (4) J.T. Oden "Finite Elements of Nonlinear Continua" McGraw-hill, 1972

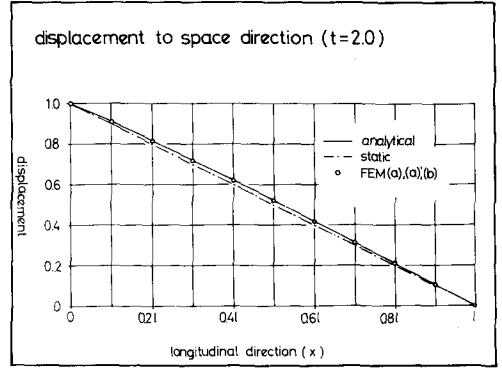


図3 長さ方向の変位 ($t=2.0$)

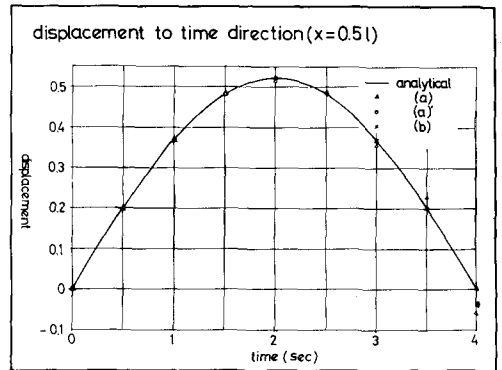


図4 時間方向の変位 ($x=0.5l$)

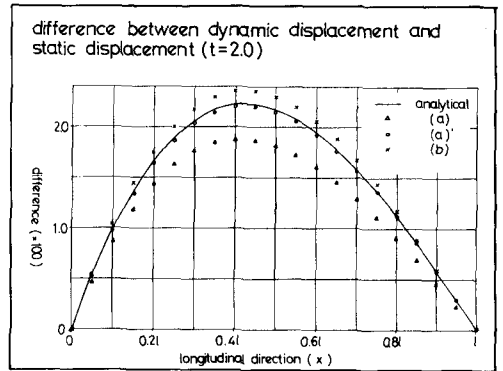


図5 動的変位と静的変位の差