I-13　　有限要素法に対するトポロジー的手法の応用

東北大　正　員　佐武正雄
東北大　学生員　○新関　茂

1．まえがき

連続体の有限要素解析は，連続体を n（$n=1,2,3$）次元の要素に分割し，その力学的諸量は，全て nodal point を通じて伝達されるとしているので，適合型の有限要素 model を用いる場合でも本質的には，Network 解析だといえる。力学問題をトポロジー的立場から取り扱う最初の試みは，G. Kron によって提唱され，力学と電気回路とのアナロジーを利用し，力学問題を等価な電気回路で置き換えることによって多くの問題について説明を行っている[1]。その後，W. R. Spillers[2)3)]，S. J. Fenves[4)5)6)] 等により，純粋な力学的立場から nodal point を 0-胞，部材を 1-胞とみなすことによって直接トポロジー的なグラフに変換することのできる構造に対する詳細な議論が行なわれている。一般に構造物の力学的挙動は (i)構造物の部材の接続関係を表わすトポロジー的性質，(ii) 座標変換によって取り扱われる幾何学的性質 (iii) 力学的性質 から影響を受ける。(ii)は，電気回路には存在しない性質である。マトリックス解析 へのトポロジー的手法の応用は、上記の３つの性質の組み合せ方により多少の差異が生じ，このことについては，S. J. Fenves による詳細な考察があり[5]，文献(4)の方法は、round-off error を含むことを指摘している。したがって類似の立場からの拡張である文献(7)にも，この種の誤差が含まれるものと思われる。本文では，W. R. Spillers 及び S. J. Fenves によって骨組構造にのみ応用されているトポロジー的手法を，連続体の有限要素解析に一般的に拡張できることを文献(7)とは異った立場から有限変形の場合も含めて説明したものである。

2．有限要素法へのトポロジー的手法の応用 —— 微小変形の場合 ——

ここでは，shell の解析にも応用できる平板要素が面内力も受ける場合を例として，微小変形の場合の有限要素法へのトポロジー的手法の応用について説明する。図－1 は，任意の有限要素の局所的な座標系と構造物全体に対する大域的な座標との関係を表わしている。４個の nodal point 間には，独立な路（open path）は，３個しか存在しない（図-2）。通常の局所的な座標系に対して誘導された stiffness matrix は，幾何学的条件で付加された剛体回転などの，力学的性質とは無関係な過剰な情報が含まれている。したがって要素の任意の１個の nodal point（ここでは，nodal point 4 である）を datum-node に選び，その datum-node に関する平衡条件式を用いることによって，その他の nodal point の変形量は，datum-node に対する相対的変形量として表現する必要がある。要素の任意の nodal point (i) における力を表わすベクトル $\mathbb{R}_i$ の成分は，図-1に示すように

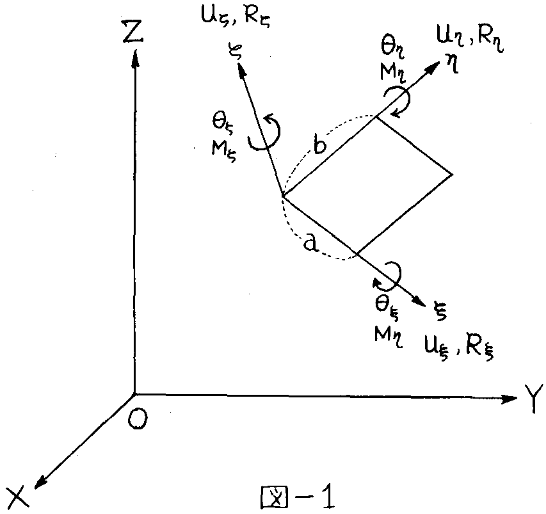
$$\mathbb{R}_i = {}^t(R_{i\xi}\quad R_{i\eta}\quad R_{i\zeta}\quad M_{i\xi}\quad M_{i\eta}\quad M_{i\zeta}) \tag{2,1}$$

とおけば，datum-node 4 における平衡条件式は，

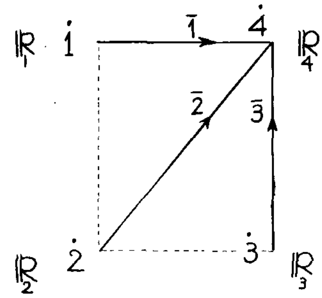
$$(\,\mathrm{H}\,,\,\mathrm{I}\,)\,\mathbb{R}' = \mathbb{O} \tag{2.2}$$

ここに I は，Unit Matrix であり，又

$$\mathbb{R}' = (\,\mathbb{R}_1\quad \mathbb{R}_2\quad \mathbb{R}_3\quad \mathbb{R}_4\,) \tag{2.3}$$



図−1



図−2

$$
\begin{aligned}
H &= (\, \mathbb{H}_1 ,\ \mathbb{H}_2 ,\ \mathbb{H}_3 \,) \\
&= \left(\begin{array}{cccccc:cccccc:cccccc}
1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&b&1&0&0&0&0&b&1&0&0\\
0&0&-a&0&1&0&0&0&-a&0&1&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1
\end{array}\right)
\end{aligned}
\qquad (2.4)
$$

である。*nodal point* での力 $\mathbb{R}'$, 剛体的な回転を含む *stiffness matrix* K', *nodal point* の絶体変 $\mathbb{U}'$ の関係

$$\mathbb{R}' = K' \,\mathbb{U}' \qquad (2.5)$$

と(2.2)式を用いると *datum-node* 4 に対する相対変位(*distortion*) $\mathbb{U}$ によって表わされた *stiffness matrix* は，結局，剛体回転を含む *stiffness matrix* K' から *datum-node* に関する成分を取り去ったものとして表わされる。

$$
\begin{pmatrix} \mathbb{R}_1 \\ \mathbb{R}_2 \\ \mathbb{R}_3 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} \mathbb{K}_{11} & \mathbb{K}_{12} & \mathbb{K}_{13} \\ \mathbb{K}_{21} & \mathbb{K}_{22} & \mathbb{K}_{23} \\ \mathbb{K}_{31} & \mathbb{K}_{32} & \mathbb{K}_{33} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \mathbb{U}_1 \\ \mathbb{U}_2 \\ \mathbb{U}_3 \end{pmatrix}
\qquad (2.6)
$$

ここに $\quad \mathbb{U}_i = \mathbb{U}'_i - {}^t\mathbb{H}_i \,\mathbb{U}'_4 \qquad (2.7)$

構造物全体に対する座標系と各要素の局所的座標系とが一致するとは，かぎらないので，座標変換について考察する必要があり，局所的な座標系から構造物全体の座標系への座標変換マトリックスを

Tとすれば，(2.7)式は，

$$\underset{i}{\mathbb{U}} = {}^{t}\underset{i}{\mathrm{T}}\mathbb{U}' - {}^{t}\underset{i}{\mathrm{H}}{}^{t}\underset{i}{\mathrm{T}}\ \underset{4}{\mathbb{U}}' \qquad (2.8)$$

と修正される。したがって modified incidence matrix A の成分 A_{ij}^{α} を次のように定義する。

$$A_{ij}^{\alpha} = \begin{cases} {}^{t}\underset{i}{\mathrm{T}} & \text{要素}\alpha\text{の nodal point } j \text{ に枝} i \text{が正連結} \\ -{}^{t}\underset{i}{\mathrm{H}}{}^{t}\underset{i}{\mathrm{T}} & 〃 \quad 〃 \quad \text{負} \quad 〃 \\ 0 & 〃 \quad 〃 \quad \text{非} \quad 〃 \end{cases} \qquad (2.9)$$

上記のように定義された modified incidence matrix Aを用いれば，各要素の datum-node 4 に対する相対変位ベクトル $\mathbb{U}$ と構造物全体の座標系に関する変位ベクトル $\mathbb{U}'$ との関係は，

$$\mathbb{U} = A\ \mathbb{U}' \qquad (2.10)$$

となり，又反傾関係(Contragradience)により，外力 $\mathbb{P}'$ と各要素内力 $\mathbb{R}$との関係として

$$\mathbb{P}' = {}^{t}A\ \mathbb{R} \qquad (2.11)$$

を得る。各要素内の力 $\mathbb{R}$と各要素の datum-node に対する相対変位ベクトル $\mathbb{U}$ の間には，

$$\mathbb{R} = K\ \mathbb{U} \qquad (2.12)$$

が成立する。Kは，各要素の相対変位によって表わされた stiffness matrix を部分マトリックスとする対角線マトリックスである。(2.10)，(2.11)，(2.12) 式から

$$\mathbb{P}' = {}^{t}AKA\ \mathbb{U}' \qquad (2.13)$$

を得る。${}^{t}AKA$ は，構造物全体の stiffness matrix である。境界条件及び対称条件は，全て modified incidence matrix A に含めて取り扱うことが可能である。

3. 有限変形問題に対するトポロジー的手法の拡張

modified incidence matrix A は，力学的には，平衡条件式を表現しているので，変形後の状態で平衡条件式を考える有限変形問題では，Aの中に変形量を導入して考察する必要があり，又 stiffness matrix は，面内力(R_1，R_2)の関数として取り扱わねばならない。したがって (2.4) 式のマトリックス H は，次のように修正される。

$$\mathrm{H} = (\underset{1}{\mathrm{H}}, \underset{2}{\mathrm{H}}, \underset{3}{\mathrm{H}})$$

$$= \left(\begin{array}{cccccc|cccccc|cccccc} 1&0&0&0&0&0 & 1&0&0&0&0&0 & 1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 & 0&1&0&0&0&0 & 0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 & 0&0&1&0&0&0 & 0&0&1&0&0&0 \\ 0&-\underset{1}{\upsilon}&0&1&0&0 & 0&-\underset{2}{\upsilon}&b&1&0&0 & 0&-\underset{3}{\upsilon}&0&1&0&0 \\ \underset{1}{\upsilon}&0&-a&0&1&0 & \underset{2}{\upsilon}&0&-a&0&1&0 & \underset{3}{\upsilon}&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&1 & 0&0&0&0&0&1 & 0&0&0&0&0&1 \end{array}\right) \qquad (3.1)$$

ここに $\underset{i}{\upsilon} = \underset{i}{u}_5 - \underset{4}{u}_5 \qquad (3.2)$

stiffness matrix は，微小変形の場合と同一の stiffness matrix K_0^{i} と有限変形の場合に

考慮される幾何学的 stiffness matrix K'_G から成り立ち

$$K' = K'_0 + K'_G \tag{3.3}$$

と表現できる．前節と同様に datum-node に関する成分を K' から取り除くことによって要素の力学的特性のみを表現している stiffness matrix K を得る。構造物全体の stiffness matrix は，前節と同様にして求めることができるが，本節の場合は非線形方程式となるので Newton-Raphson 法等の段階的増分法によって解析する必要がある。

4．あとがき

面内力を受ける板が微小変形及び有限変形する場合を例として，主として，参考文献(3) (5) (9) で述べられている骨組の場合から連続体の有限要素法に，トポロジー的手法を一般的に拡張して応用する方法について考察した。又慣性力を $\mathbb{R}$，mass matrix を M とすれば $\mathbb{R} = M\ddot{u}$ が成り立つので stiffness matrix に対して用いたと同様な方法を用いて，トポロジー的手法を動的な問題に応用することも容易であるものと思われる。ここで述べたトポロジー的手法によれば，連続体の有限要素解析は，Network 解析と同等であり，分割を無限に細くしたときの極限において 正解値に収束するような有限要素 model を考えれば，連続体は，無限次元の Network に対応し，その不静定次数も，無限に大きくなる。実際の有限要素解析は，有限次元の network に対してのみ可能であるが，上記のような立場から有限要素の集合としての連続体を静定化しようとすれば，そのための切断の個数が非常に多くなるので，node method と双対的な方法である mesh method は，こういう意味からは，連続体の有限要素解析に，適さないように思われる。

参考文献

1) Kron, G.; Diacptics, Macdnald, 1963

2) Spiller, W. R. ; Network Analogy for Linear Structures, ASCE, vol. 89, EM4, 1963

3) Maggio, F. L. D. and Spillers, W. R. ; Network Analysis of Structures, ASCE, vol.91, EM3, 1965

4) Fenves, S. J. and Branin, F. H. ; Network-Topological Formulation of Structural Analysis, ASCE, vol.89, ST3, 1963

5) Fenves, S. J. ; Structural Analysis by Network, Matrixes and Conputers, ASCE, vol.95, ST1, 1966

6) Lagerquist, D. R. and Fenves, S. J. ; Design Using Symbolic Topological Equations, ASCE, vol.95, EM3, 1963

7) 新関，佐武 ； 節点の接続をトポロジー的に考慮した有限要素法，土木学会才26回年次学術講演会概要 1971，I 139-142

8) Brebbid, C and Connor, J. ; Geometrically Nonlinear Finite Element Analysis, ASCE, vol.95, EM2, 1968

9) Rivesley, R. K. ; Matrix Methods of Structural Analysis, Pergamon Press, 1964

10) Veblen, O.; Analysis Situs, American Mathematical Society, 1965

11) Przemieniecki, J. S. ; Theory of Matrix Structural Analysis, McGraw-Hill, 1968