I-11　有限要素法の基礎としての変分原理に関する一考察*

東京工業大学 正員　吉田 裕

1. はじめに

有限要素法の基礎関係式の誘導に関しては種々の過程が提示されており，それぞれの過程の基礎となる変分原理によって分類されている。有限要素法は，連続体を有限の大きさの要素の集合として理想化し，解析する方法であるから，与えられた連続体の中に設定される，個々の要素間の境界の数が有限の数になり，解析に先立って仮定される変位形ないしは応力分布形に対して原理的に要求される連続の条件を，要素境界に沿っては拘束条件およびそれに対応する *Lagrange* の乗数によって導入することによって，緩和することができる。したがって，基本的なポテンシャルエネルギー原理，相補エネルギー原理および *Reissner* の原理から，有限要素解析に対する修正変分原理を構成することができ，実際に数多くの一般化された形の変分原理が与えられ，具体的な有限要素の開発およびそれらによる解析が行なわれてきた。

変分原理によって与えられるものは，仮定された変位分布形ないしは応力分布形を重み関数とした積分の意味における等価な平衡方程式ないしは適合条件式であり，その意味における近似解析法であることはいうまでもないが，これらの変分原理によって，要素分割を細かくしていったときに解が正しい解に収束するかどうかの保証が得られることになる。反面，基礎理論的に要求される適合条件を満たさない変位仮定に基づいて，個々の要素の剛性マトリックスを直接誘導して用いる非適合直接剛性法も，具体的な解析においては頻繁に使用されている。このような非適合要素の収束性に関して数学的に検討した論文などもみられるが，一般的には，実際の数値計算結果によって正しい解に収束する状況が示されることによって，その要素の信頼性を考える手がかりとしている。いいかえれば，非適合直接剛性法による要素の中にも，正しい解に収束するものが多く存在するということである。

先に述べたように，これまでに与えられてきた種々の有限要素モデルは，対象とする連続体の全体系を基準とする立場から説明され，与えられている。一方，プログラム化等の実際の解析過程においては，要素マトリックスを集合して全体系を構成するという意味で，要素単位が基準となるのが普通である。要素単位を基準とした具体的解析過程の信頼性を，実際の解析の対象としての全体系の面から理論的に保証しようとするのであるから，これまでに与えられてきた理論的立場に矛盾はない。しかし，非適合直接剛性法のように，全体系の面から原理的に必要とされる条件を満たさない形で，要素単位を基準として定式化される場合においても，正しい解に収束するものが多く存在するという，経験的事実を考えるとき，有限要素法の基礎としての変分原理を，要素単位を基準とする立場から考え直してみることも必要なことである。

本報告では，独立に存在する要素単位を集合して全体系を構成するという立場から，これまでに個々に与えられてきた有限要素モデルを統一的に説明することができることを示し，発展的に非適合直接剛性法の位置づけを行なう。さらに，いくつかの論点を実証する意味において，平板曲げの問題を

* 本原稿は，土木学会論文報告集に投稿予定の同題の論文を要約したものである。

対象とする具体的な解析結果を示す。

なお，平衡方程式の表示等の形式上の煩雑さの中に，論点が不明確になることを避けるために，本報告においては，対象を *Kirchhoff* の仮定に基づいた平板曲げの問題に限定して話をすゝめているが，変位成分や力量の成分等をベクトル表示しているために，これらの成分の内容と平衡方程式の表記等を置き換えれば，論点を一般化することは容易である。以下に要点のみを列挙する。

2. ポテンシャルエネルギー系の変分原理

最初に，式(1)のような修正ポテンシャルエネルギー関数を与える。式(1)は，幾何学的境界条件を拘束条件とし，この条件に対応する *Lagrange* の乗数 β_e を導入して修正したものである。また，f_e および u_e は，式(2)に示すような境界における力量のベクトルおよびこれに対応する変位成分のベクトルである。式(1)の汎関数の変分は，式(3)のように示される。

$$\Pi_{Mp}=\int_A\left\{\frac{1}{2}\varepsilon^T D\varepsilon-\bar{p}w\right\}dA-\int_{Se\sigma}\bar{f}_e^T u_e\,dS-\int_{Seu}\beta_e^T\{u_e-\bar{u}_e\}\,dS \tag{1}$$

$$f_e^T=\{Q_n\ -M_{ns}\ -M_n\}_e\ ,\quad u_e^T=\{w\ \ w_{,s}\ \ w_{,n}\}_e \tag{2}$$

$$\delta\Pi_{Mp}=-\int_A\{M^{\alpha\beta}_{,\alpha\beta}(\varepsilon)+\bar{p}\}\delta w\,dA+\int_{Se\sigma}\{f_e(\varepsilon)-\bar{f}_e\}^T\delta u_e\,dS+\int_{Seu}\left[\{f_e(\varepsilon)-\beta_e\}^T\delta u_e-\{u_e-\bar{u}_e\}^T\delta\beta_e\right]dS \tag{3}$$

具体的な有限要素解析においては，例えば，個々の要素内では連続な変位関数が仮定される。したがって，個々の要素を独立な単位と考えて，１つの要素の要素内と要素境界で閉じた形で式(1)を適用し，全体系を構成する全要素のそれぞれに対応する関数を単純に加え合せてみると，式(4)のような汎関数が得られる。式(4)においては，全体系における実際の境界を Se とし，要素分割によって仮想的に設定された内部要素境界を S_i として区別して表記している。

$$\Pi_{Mp}=\sum_m\Pi_{Mpm}=\sum_m\left[\int_{A_m}\left\{\frac{1}{2}\varepsilon^T D\varepsilon-\bar{p}w\right\}dA\right]-\int_{Se\sigma}\bar{f}_e^T u_e\,dS-\int_{Seu}\beta_e^T\{u_e-\bar{u}_e\}\,dS-\sum_i\left[\!\left[\int_{Si\sigma}\left[-(\bar{f}_i^+)^T u_i^+ +(\bar{f}_i^-)^T u_i^-\right]dS+\int_{Siu}\left[(\beta_i^+)^T\{u_i^+ +\bar{u}_i\}+(\beta_i^-)^T\{u_i^- -\bar{u}_i\}\right]dS\right]\!\right] \tag{4}$$

式(4)の汎関数の停留条件から，式(5)のような *Euler* の方程式が得られることを示すことは容易である。

$$\begin{aligned}
&M^{\alpha\beta}_{,\alpha\beta}(\varepsilon)+\bar{p}=0 && \text{in } A\\
&f_e(\varepsilon)=\bar{f}_e && \text{on } Se\sigma\\
&u_e=\bar{u}_e\ ,\quad f_e(\varepsilon)=\beta_e && \text{on } Seu\\
&f_i^+(\varepsilon)=-\bar{f}_i^+\ ,\quad f_i^-(\varepsilon)=\bar{f}_i^- && \text{on } Si\sigma\\
&u_i^+=-\bar{u}_i\ ,\quad u_i^-=\bar{u}_i\ ,\quad f_i^+(\varepsilon)=-\beta_i^+\ ,\quad f_i^-(\varepsilon)=\beta_i^- && \text{on } Siu
\end{aligned} \tag{5}$$

2・1 変位仮定のハイブリッドモデルⅠ

いま，要素境界上の力量 $\tilde{f}$ が一般化内力の関数として，式(6)に示された条件を満たすように設定されるならば，式(4)は式(7)のように書き改めることができる。式(7)の汎関数の停留条件から定式化される有限要素モデルが，いわゆる変位仮定のハイブリッドモデルⅠである。

$$\begin{aligned}
&\tilde{f}_i=-\bar{f}_i^+\ ,\quad \tilde{f}_i=\bar{f}_i^- && \text{on } Si\sigma\\
&\tilde{f}_i=\beta_i^+\ ,\quad \tilde{f}_i=\beta_i^- && \text{on } Siu\\
&\tilde{f}_e=\bar{f}_e && \text{on } Se\sigma\\
&\tilde{f}_e=\beta_e && \text{on } Seu
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\Pi_{Mp}=\sum_m\Big[\int_{A_m}\{\frac{1}{2}\varepsilon^T D\varepsilon-\bar{p}w\}dA\Big]-\int_{S_{e\sigma}}\tilde{f}_e^T u_e dS-\int_{S_{eu}}\tilde{f}_e^T\{u_e-\bar{u}_e\}dS$$
$$-\sum_i\Big[\int_{S_i}\tilde{f}_i^T\{u_i^+ + u_i^-\}dS\Big]$$
$$=\sum_m\Big[\int_{A_m}\{\frac{1}{2}\varepsilon^T D\varepsilon-\bar{p}w\}dA-\int_{S_m}\tilde{f}_B^T u_B dS\Big]+\int_{S_{eu}}\tilde{f}_e^T\bar{u}_e dS \quad (7)$$

2·2 適合モデル

要素内の変位形が，それ自身において必然的に，要素境界に沿っての要素間の適合条件を満足するように仮定される場合には，式(4)の汎関数は次のように書き改められる。

$$\Pi_{Mp}=\sum_m\Big[\int_{A_m}\{\frac{1}{2}\varepsilon^T D\varepsilon-\bar{p}w\}dA\Big]-\int_{S_{e\sigma}}\bar{f}_e^T u_e dS-\int_{S_{eu}}\beta_e^T\{u_e-\bar{u}_e\}dS$$
$$-\sum_i\Big[\int_{S_{i\sigma}}\{\bar{f}_i^+ + \bar{f}_i^-\}^T u_i dS+\int_{S_{iu}}\{-\beta_i^+ + \beta_i^-\}^T\{u_i-\bar{u}_i\}dS\Big] \quad (8)$$

こゝに，　$u_i\equiv -u_i^+$　，　$u_i\equiv u_i^-$　である。さらに，仮定された変位形が要素境界に沿って与えられた幾何学的境界条件を必然的に満たすならば，すなわち，　$u_i\equiv\bar{u}_i$ on S_{iu}，$u_e\equiv\bar{u}_e$ on S_{eu}　であるならば，式(8)の関数は次のように書くことができる。

$$\Pi_{Mp}=\sum_m\Big[\int_{A_m}\{\frac{1}{2}\varepsilon^T D\varepsilon-\bar{p}w\}dA\Big]-\int_{S_{e\sigma}}\bar{f}_e^T u_e dS-\sum_i\Big[\int_{S_{i\sigma}}\bar{f}_i^T u_i dS\Big] \quad (9)$$

こゝに，　$\bar{f}_i=\bar{f}_i^+ + \bar{f}_i^-$　on $S_{i\sigma}$　であり，$\bar{f}_i$ は $S_{i\sigma}$上に実際に作用する力を示している。式(9)の汎関数に基づいて定式化される有限要素モデルが，一般の適合モデルである。

2·3 変位仮定のハイブリッドモデルII

もし，連続体内部に設定された内部要素間境界は，解析上仮想的に設定された境界であって，これらの内部要素境界に沿っても，変位と応力の両方とも実際に連続である場合には，式(4)において内部要素境界に与えられた変位 $\bar{u}_i$ を，新たに附加される変数 $\tilde{u}_i$ と置き換え，さらに要素境界上の変数 β を $\tilde{f}$ と書き換えることによって，次のような関数を与えることができる。

$$\Pi_{Mp}=\sum_m\Big[\int_{A_m}\{\frac{1}{2}\varepsilon^T D\varepsilon-\bar{p}w\}dA\Big]-\int_{S_{e\sigma}}\bar{f}_e^T u_e dS-\int_{S_{eu}}\tilde{f}_e^T\{u_e-\bar{u}_e\}dS$$
$$-\sum_i\Big[\!\Big[\int_{S_i}\Big[(-\tilde{f}_i^+)^T\{u_i^+ + \tilde{u}_i\}+(\tilde{f}_i^-)^T\{u_i^- - \tilde{u}_i\}\Big]dS\Big]\!\Big]$$
$$=\sum_m\Big[\int_{A_m}\{\frac{1}{2}\varepsilon^T D\varepsilon-\bar{p}w\}dA-\int_{S_m}\tilde{f}_B^T\{u_B-\tilde{u}_B\}dS\Big]-\int_{S_{e\sigma}}\bar{f}_e^T\tilde{u}_e dS \quad (10)$$

こゝに，$\tilde{u}_B$ は　$\tilde{u}_B\equiv\bar{u}_e$ on S_{eu}　を満たすように与えられるものとしている。また，$\tilde{f}_B$ は一般化内力の関数として要素境界上に与えられる力量であり，個々の要素に対して独立に与えることができるが，$\tilde{u}_B$ は隣接する要素間で同じ値をとるように決められなければならない。式(10)の停留条件から得られる $Euler$ の方程式の1つとして　$\tilde{f}^+ + \tilde{f}^- = 0$　が与えられる。式(10)に基づいて定式化される有限要素モデルが，いわゆる変位仮定のハイブリッドモデルIIである。

3. コンプレメンタリエネルギー系の変分原理

最初に，式(11)のような修正コンプレメンタリエネルギー関数を与え，個々の要素に式(11)を適用し，全体系を構成する全要素のそれぞれに対応する関数を単純に加え合せると，式(12)のような汎関

数が得られる。式(12)における応力ベクトルσは，要素内で平衡方程式を満足するように与えられる。

$$\Pi_{Mc}=\int_A \frac{1}{2}\sigma^T N\sigma\, dA-\int_{S_{eu}} f_e^T \bar{u}_e\, dS-\int_{S_{e\sigma}}\alpha_e^T\{f_e-\bar{f}_e\}\,dS \qquad (11)$$

$$\begin{aligned}\Pi_{Mc}=&\sum_m\Big[\int_{A_m}\frac{1}{2}\sigma^T N\sigma\, dA\Big]-\int_{S_{eu}} f_e^T \bar{u}_e\, dS-\int_{S_{e\sigma}}\alpha_e^T\{f_e-\bar{f}_e\}\,dS\\&-\sum_i\Big[\!\Big[\int_{S_{iu}}\big[(f_i^+)^T\bar{u}_i^+ +(f_i^-)^T\bar{u}_i^-\big]dS+\int_{S_{i\sigma}}\big[(\alpha_i^+)^T\{f_i^+-\bar{f}_i^+\}+(\alpha_i^-)^T\{f_i^--\bar{f}_i^-\}\big]dS\Big]\!\Big]\end{aligned} \qquad (12)$$

式(12)において，付帯条件として　$\bar{u}_i^+\equiv\bar{u}_i^-$ on S_{iu}，$\alpha_i^+\equiv\alpha_i^-$ on $S_{i\sigma}$ が与えられると，式(12)の汎関数は，次のように書き改めることができる。

$$\begin{aligned}\Pi_{Mc}=&\sum_m\Big[\int_{A_m}\frac{1}{2}\sigma^T N\sigma\, dA\Big]-\int_{S_{eu}} f_e^T \bar{u}_e\, dS-\int_{S_{e\sigma}}\alpha_e^T\{f_e-\bar{f}_e\}\,dS\\&-\sum_i\Big[\int_{S_{iu}}\{f_i^+ + f_i^-\}^T\bar{u}_i\, dS+\int_{S_{i\sigma}}\alpha_i^T\{f_i^+ + f_i^- -\bar{f}_i\}\,dS\Big]\end{aligned} \qquad (13)$$

こゝに，　$\bar{u}_i=\bar{u}_i^+=\bar{u}_i^-$，$\alpha_i=\alpha_i^+=\alpha_i^-$，$\bar{f}_i=\bar{f}_i^+ + \bar{f}_i^-$　である。

式(13)の汎関数の停留条件から，次のような *Euler* の方程式が得られる。$u_e(\sigma)=\bar{u}_e$ on S_{eu}
$f_e=\bar{f}_e$，$u_e(\sigma)=\alpha_e$ on $S_{e\sigma}$ /　$u_i^+(\sigma)=-\bar{u}_i$，$u_i^-(\sigma)=\bar{u}_i$ on S_{iu} /
$f_i^+ + f_i^- = \bar{f}_i$，$u_i^+(\sigma)=-\alpha_i$，$u_i^-(\sigma)=\alpha_i$ on $S_{i\sigma}$

3·1　応力仮定のハイブリッドモデルI

要素境界に沿って，変位$\tilde{u}$を，節点変位の関数として新たに仮定するものとして，この$\tilde{u}$が，次のような条件，すなわち　$\tilde{u}_i=\bar{u}_i$ on S_{iu}，$\tilde{u}_i=\alpha_i$ on $S_{i\sigma}$，$\tilde{u}_e=\bar{u}_e$ on S_{eu}，$\tilde{u}_e=\alpha_e$ on $S_{e\sigma}$　を満たすように仮定されるならば，式(13)は次のように書き改められる。

$$\begin{aligned}\Pi_{Mc}=&\sum_m\Big[\int_{A_m}\frac{1}{2}\sigma^T N\sigma\, dA\Big]-\int_{S_{eu}} f_e^T \tilde{u}_e\, dS-\int_{S_{e\sigma}}\tilde{u}_e^T\{f_e-\bar{f}_e\}\,dS\\&-\sum_i\Big[\int_{S_i}\tilde{u}_i^T\{f_i^+ + f_i^-\}\,dS-\int_{S_{i\sigma}}\tilde{u}_i^T\bar{f}_i\, dS\Big]\\=&\sum_m\Big[\int_{A_m}\frac{1}{2}\sigma^T N\sigma\, dA-\int_{S_m}\tilde{u}_B^T f_B\, dS\Big]+\int_{S_{e\sigma}}\tilde{u}_e^T\bar{f}_e\, dS+\sum_i\Big[\int_{S_{i\sigma}}\tilde{u}_i^T\bar{f}_i\, dS\Big]\end{aligned} \qquad (14)$$

こゝに，$\bar{f}_i$ は $S_{i\sigma}$上に実際に作用する力である。式(14)にもとづいて定式化される有限要素モデルが，いわゆる応力仮定のハイブリッドモデルIである。

3·2　平衡モデル

式(13)において，要素内に仮定される応力分布が，必然的に，次の条件　$f_i^+ + f_i^-\equiv 0$ on S_i　したがって，　$\bar{f}_i\equiv 0$ on $S_{i\sigma}$，$f_e\equiv\bar{f}_e$ on $S_{e\sigma}$　を満たすように仮定されるならば，式(13)は次のように書き改めることができる。

$$\Pi_{Mc}=\sum_m\Big[\int_{A_m}\frac{1}{2}\sigma^T N\sigma\, dA\Big]-\int_{S_{eu}} f_e^T\bar{u}_e\, dS \qquad (15)$$

式(15)に基づいて定式化される有限要素モデルが，平衡モデルである。

以下，応力仮定のハイブリッドモデルIIおよび *Reissner* の変分原理にもとづいた定式化，直接剛性法の位置づけ，数値計算例等に関する報告の詳細は，発表の機会に補いたいと思う。