I-6　　演算子法による弾性床上の円板

信州大学　学生員　○宮脇　容一
〃　　正　員　谷本　勉之助
〃　　〃　　夏目　正太郎

1. まえがき

弾性床上の円板の曲げに関して，たわみ w についてのつりあい方程式を極座標（r, θ）で表わせば

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^2 w + \frac{k}{D}w = \frac{q}{D} \qquad (1)$$

ここで，q は荷重強度，D は板剛度，k は地盤反力係数である．この方程式を解くために，ベッセル関数を導入すると，数値解析は煩雑となり，特に変断面の円板の場合，解析はほとんど不可能といってよい．

そこで本解析では，円板を多数の環状要素の集合体と考え，任意の隣接要素は，円形のバネで支持されているものと仮定することによって，弾性床上の円板の曲げ解析を

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^2 w = \frac{q}{D} \qquad (2)$$

の通常の円板の解析に帰着させることによって容易に処理する手法を示した．

2. ウィンクラーの仮定と円形バネの関係

ウィンクラーの仮定によるたわみと反力 R の関係は

$$R = k w \qquad (3)$$

仮定したバネのたわみと反力 V との関係は

$$V = \lambda w \qquad (4)$$

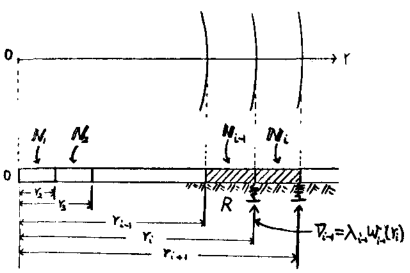

図 1

ここで，λ はバネ定数である．そこで，$r-1$ 番目の要素について，分散反力 R をバネの集中反力 V に置きかえる（図 1 参照）

$$R(r_i - r_{i-1}) = V_{i-1} \quad \text{既ち} \quad k(r_i - r_{i-1}) = \lambda_{i-1} \qquad (5)$$

3. 基本式

環状要素の基本式は式（2）より

$$\mathbb{W}(r) = \mathbb{R}(r)\mathbb{N} + \mathbb{w}(r)\, q \qquad (6)$$

上式に於いて，$\mathbb{W}(r) = \{w, \theta_r, M_r, S_r\}$ は完全状態ベクトルから M_θ をはずしたものである．

4. 結合条件式及び漸化式

各隣接要素間での結合条件より，演算子法の基礎となる漸化式を導き，中心の円板要素の流通マトリクス Ω を順次，移行させる．いま，r と $r-1$ 番目の要素間の結合条件より

$$\mathbb{W}_i(r_i)=\mathcal{S}_{i-1}\mathbb{W}_{i-1}(r_i) \quad 即ち \quad \mathbb{R}_i(r_i)\mathbb{N}_i+\mathbb{w}_i(r_i)q_i=\mathcal{S}_{i-1}\left[\mathbb{R}_{i-1}(r_i)\mathbb{N}_{i-1}+\mathbb{w}_{i-1}(r_i)q_{i-1}\right] \tag{7}$$

従って

$$\mathbb{N}_i=\mathbb{L}_i\mathbb{N}_{i-1}+\lfloor \mathbb{F}_i\,,\ \mathbb{F}'_i \rfloor \begin{bmatrix} q_{i-1} \\ q_i \end{bmatrix} \tag{8}$$

ここで

$$\mathcal{S}_{i-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda_{i-1} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

また中心要素が円板要素であることより基本式は

$$\mathbb{W}_1(r)=\mathbb{R}_1(r)\Omega+\mathbb{W}_1(r)q_1 \tag{10}$$

以上の式(8)と式(10)より求める漸化式は

$$\mathbb{N}_i=\mathbb{G}_i\Omega+\lfloor \mathbb{H} \rfloor_i\{q_i\} \qquad (ただし\quad \mathbb{G}_2=\mathbb{L}_2\,,\ \lfloor \mathbb{H} \rfloor_2=\lfloor \mathbb{F}_2\,,\ \mathbb{F}'_2 \rfloor) \tag{11}$$

5. 最終方程式

最終方程式は，外周の境界条件より流通マトリクスΩを決定する．

$$\mathbb{B}'\mathbb{N}_n+\mathbb{C}'q_n=0 \qquad \mathbb{N}_n=\mathbb{G}_n\Omega+\lfloor \mathbb{H} \rfloor_n\{q_n\} \tag{12}$$

以上より

$$\Omega=-(\mathbb{B}'\mathbb{G})^{-1}\left[\mathbb{B}'\lfloor \mathbb{H} \rfloor_n\{q_n\}+\mathbb{C}'q_n\right] \tag{13}$$

式(13)よりΩが決定したら式(11)の漸化式によって，順次固有マトリクスを求め，基本式(6)によって円板の全挙動を求める．

6. 集中荷重の載荷

いま，円板上に集中荷重Pが載荷されている場合．

$$q_1=P/\pi r_1^2 \qquad q_2=q_3\cdots\cdots q_n=0 \tag{14}$$

この場合，固有マトリクスは

$$\mathbb{N}_2=\mathbb{L}_2\Omega+\mathbb{F}_2 q_1 \qquad \mathbb{N}_i=\mathbb{L}_i\mathbb{N}_{i-1} \quad (ただし\quad i=3,4,\cdots n) \tag{15}$$

よって式(11)の漸化式は

$$\mathbb{N}_i=\mathbb{G}_i\Omega+\mathbb{H}_i q_1 \qquad (ただし\quad \mathbb{G}_2=\mathbb{L}_2\,,\ \mathbb{H}_2=\mathbb{F}_2) \tag{16}$$

円板外周の境界条件は

$$\mathbb{B}'\mathbb{N}_n=0 \tag{17}$$

以上より流通マトリクスΩは

$$\Omega=-(\mathbb{B}'\mathbb{G}_n)^{-1}\mathbb{B}'\mathbb{H}_n q_1 \tag{18}$$

これが最終方程式である．

7. あとがき

本解析では，断面の変化を基本式の座標マトリクス$\mathbb{R}(r)$で処理するため，変断面，並びに一様断面を同等なものとして解析できることを最後に記しておく