I-5　　演算子法による提防下の樋管の解析

福山コンサルタント　○正員　佐藤　進
信州　大学　正員　谷本　勉之助
〃　正員　夏目　正太郎

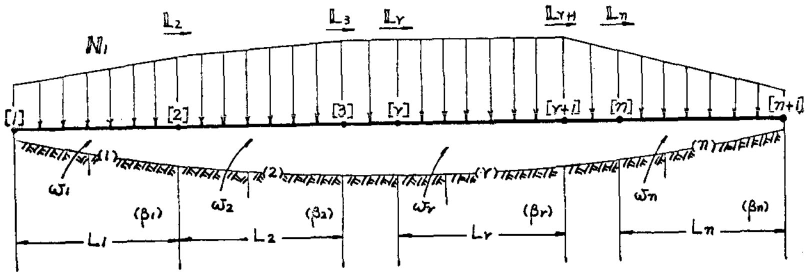
1. 概説

本解析は地盤反力係数が変化している場合の弾性床上の梁を，演算子法によって，解析するものである．その場合，地盤反力係数の変化点で，梁を分割して解析上は多径間の連続梁として考える．

又解析は次の仮定に基づく．

1. 微少変形理論として力釣合は，系の変形以前において考える．
2. 弾性床は理想化された基礎であって，沈下量と反力が比例する，その係数(k)を地盤反力係数と呼び既知とする．

2. 状態ベクトル式



Winker の仮定により支配された弾性床上の梁の微分方程式より出発して，任意の分割点（第 r 分割点）のたわみ w_r は

$$w_r = \lfloor e^{\beta x}\cos\beta x \quad e^{\beta x}\sin\beta x \quad e^{-\beta x}\cos\beta x \quad e^{-\beta x}\sin\beta x \rfloor \mathbb{N}_r \qquad \left(\text{ただし}\ \beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}\right) \tag{1}$$

従って状態ベクトル式は次式で示される

$$\mathbb{W}_r(\rho) = \begin{bmatrix} w \\ \theta \\ M \\ S \end{bmatrix}_r = \begin{bmatrix} 1 \\ d/dx \\ -EI\, d^2/dx^2 \\ -EI\, d^3/dx^3 \end{bmatrix} w_r \tag{2}$$

ここで ρ は $\rho = x/L$ の無次元流通座標であり，EI は曲げ剛さである．

式(1)をもって式(2)を書きなおし次式を得る．

$$\mathbb{W}_r(\rho) = \mathbb{R}_r(\rho)\left[\mathbb{N} + \mathbb{K}(\rho)\right]_r \qquad (r = 1 \sim n) \tag{3}$$

ここで $\mathbb{N}_r$ は固有マトリックス，$\mathbb{R}(\rho)$ は(4-by-4)のサイズの座標マトリクス，$\mathbb{K}(\rho)$ は荷重マトリクスである．

3. 結合状態

任意の分割点，第r分割点での連続条件式は

$$\mathbb{W}_{r-1}(1)=\mathbb{W}_r(0) \qquad 既ち \qquad \mathbb{R}_{r-1}(\ell)[\mathbb{N}+\mathbb{K}(1)]_{r-1}=\mathbb{R}_r(\ell)\mathbb{N}_r \tag{4}$$

従って

$$\mathbb{N}_r=\mathbb{L}_r[\mathbb{N}+\mathbb{K}(1)]_{r-1} \tag{5}$$

ここで$\mathbb{L}_r$は（4-by-4）サイズの移項マトリクスで，(r-1)径間の影響を(r)径間の固有マトリクスに伝えるものであり，次の式で与えられる．

$$\mathbb{L}_r=\mathbb{R}_r^{-1}(0)\mathbb{R}_{r-1}(1) \tag{6}$$

式(5)をr=2からrまで繰り返して用いて$\mathbb{N}_r$を$\mathbb{N}_1$で関係づけると，

$$\mathbb{N}_r=\mathbb{Q}_r\mathbb{N}_1+\mathbb{T}_r \tag{7}$$

ここで

$$\mathbb{Q}_r=\mathbb{L}_r\,\mathbb{Q}_{r-1} \qquad (\text{ただし} \quad \mathbb{Q}_1=\mathbb{E}) \tag{8}$$

$$\mathbb{T}_r=\mathbb{L}_r(\mathbb{K}_{r-1}+\mathbb{T}_{r-1}) \qquad (\text{ただし} \quad \mathbb{T}_1=\mathbb{0}) \tag{9}$$

$\mathbb{N}_1$は式(7)からわかるように，第r部材まで伝わるので，流通マトリクスと呼ぶ．

4．最終方程式

この連続梁の左端と右端における境界条件式

$$\mathbb{B}\,\mathbb{N}_1=0 \qquad \mathbb{B}'[\mathbb{N}_n+\mathbb{K}_n]=0 \tag{10}$$

と式(7)の$\mathbb{N}_n$と$\mathbb{N}_1$との関係式

$$\mathbb{N}_n=\mathbb{Q}_n\mathbb{N}_1+\mathbb{T}_n \tag{11}$$

より，流通マトリクス$\mathbb{N}_1$は

$$\mathbb{N}_1=-\begin{bmatrix}\mathbb{B}\\ \mathbb{B}'\mathbb{Q}_n\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ \mathbb{B}'\end{bmatrix}[\mathbb{T}_n+\mathbb{K}_n] \tag{12}$$

式(12)が求める最終方程式である．流通マトリクス$\mathbb{N}_1$が求まれば式(7)をr=2～nまで順次変化させ，その時々の固有値を式(2)に代入することによって，おのおのの状態ベクトル$\mathbb{W}_r(\ell)$は決定し本構造系は解析出来たことになる．

5．地盤反力

弾性床上の梁の基本微分方程式を用いた場合のたわみwを3階微分して得られる剪断力は地盤反力を示すものではない．即ち両端自由の梁に一様分布荷重を満載した系のモーメント，剪断力は零である．地盤反力は

$$R=k\,w \tag{13}$$

の式から求められなければならない．そして，この地盤反力Rの和ΣRと支点における反力とで荷重が支えられている．この支点反力はt=0，t=1での剪断力から求められる．両端を自由とすれば，支点反力は零であり，地盤反力の和によって荷重は支えられる．