I-4 演算子法による弾性床上の曲がり梁の解析

信州大学　学生員　○高城正司
正　員　谷本勉之助
〃　夏目正太郎

1. まえがき

この論文は、弾性床上の曲がり梁について、漸化変形法を用いて、解析したものである。これは三軸マトリクスになり、漸化式となり、電子計算機に、能率と精度を与えるものである。

2. 状態ベクトル

状態ベクトルは、一般変位 $\mathbb{U}(\rho)$ と、一般力 $\mathbb{V}(\rho)$ とに表わすことができる。

$$\mathbb{U}(\rho) = \{\phi \quad \omega \quad \theta\}_\rho \quad , \qquad \mathbb{V}(\rho) = \{T \quad S \quad M\}_\rho \quad . \tag{1}$$

ここに

ϕ : ねじれ角　　ω : たわみ量　　θ : たわみ角　　T : ねじりモーメント

S : せん断力　　M : 曲げモーメント

3. 基礎式

$$\frac{d^4\omega}{d\rho^4} = -L^4\frac{k}{EI}\omega \quad (\text{曲げ挙動}) \quad ; \qquad \frac{d^2\phi}{d\rho^2} = 0 \quad (\text{ねじり挙動}) \quad . \tag{2}$$

ここに、

$\rho = \frac{x}{L}$: 全体流通座標　　L : 部材長　　k : 弾性床の垂直方向弾性常数(Winkler)

E : 弾性係数　　I : 断面二次モーメント.

(1)式と(2)式より

$$\mathbb{U}(\rho) = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \frac{\beta}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ 0 & 0 & f_1-f_2 & f_1+f_2 & -f_3-f_4 & f_3-f_4 \end{bmatrix} [\mathbb{N} + \langle\mathbb{K}\rangle]$$

$$\mathbb{V}(\rho) = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} & & \\ & -\frac{2EI\beta^3}{L^3} & \\ & & -\frac{2EI\beta^2}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f_1-f_2 & f_1-f_2 & f_3-f_4 & -f_3-f_4 \\ 0 & 0 & -f_2 & f_1 & f_4 & f_3 \end{bmatrix} [\mathbb{N} + \langle\mathbb{K}\rangle] \tag{3}$$

ここに、

GJ : ねじり剛性.　　$\beta = \sqrt[4]{\frac{kL^4}{4EI}}$　　$f_1 = e^{\beta\rho}\cos\beta\rho$　　$f_2 = e^{\beta\rho}\sin\beta\rho$

$f_3 = e^{-\beta\rho}\cos\beta\rho$　　$f_4 = e^{-\beta\rho}\sin\beta\rho$　　$\mathbb{N}$: 積分常数群　　$\langle\mathbb{K}\rangle$: 荷重項

(3)式を簡略に書くと、

$$\begin{bmatrix} \mathbb{U}(\rho) \\ \mathbb{V}(\rho) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{P}(\rho) \\ \mathbb{Q}(\rho) \end{bmatrix} [\mathbb{N} + \langle\mathbb{K}\rangle] \tag{4}$$

4. 接点における条件

曲がり梁であるので、全体座標へ射影するのに、射影子を用いる。(図参照)

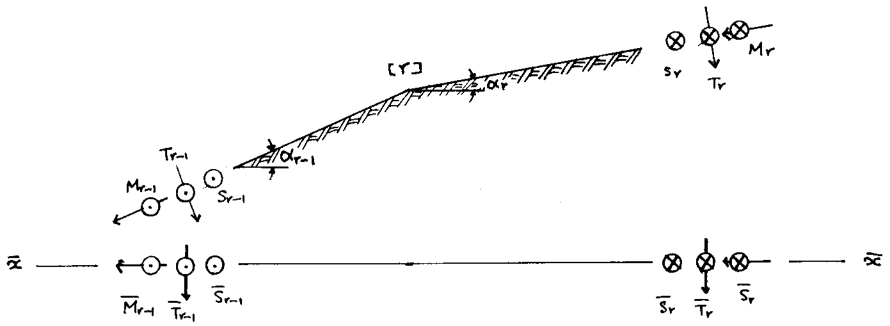

図　全体座標への射影

$$\overline{\mathbb{V}}_r = \mathbb{R}_r \mathbb{V}_r \qquad \text{ここに、} \mathbb{R}_r \text{：射影子。} \tag{5}$$

[r]点における条件

$$\overline{\mathbb{V}}_r = \overline{\mathbb{V}}'_{r-1} \qquad \text{すなわち、} \qquad \mathbb{R}_r \mathbb{V}_r = \mathbb{R}_{r-1} \mathbb{V}'_{r-1} \tag{6}$$

5. 最終方程式

(4)式より、部材端力を部材端変位で示した、次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \mathbb{V} \\ \mathbb{V}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{U} \\ \mathbb{U}' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma \\ \gamma' \end{bmatrix} \mathbb{K} \tag{7}$$

(6)式，(7)式を用いて、次の最終方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \mathbb{B}_1 & \mathbb{C}_1 & & & \\ \mathbb{A}_2 & \mathbb{B}_2 & \mathbb{C}_2 & & \\ & \mathbb{A}_3 & \mathbb{B}_3 & \mathbb{C}_3 & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \mathbb{A}_n & \mathbb{B}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{U}_1 \\ \mathbb{U}_2 \\ \mathbb{U}_3 \\ \cdots \\ \mathbb{U}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{P}_1 \\ \mathbb{P}_2 \\ \mathbb{P}_3 \\ \cdots \\ \mathbb{P}_n \end{bmatrix} = 0 \tag{8}$$

この(8)式を、漸化的に処理をすることにより、変形量を求めることができる。そうすれば、(7)式を用いて、容易に力量を得ることができる。

6. 荷重項

なお荷重項は、次の式により与えられる。

$$\mathbb{K}_p = \begin{bmatrix} \mathbb{P}(K) \\ \mathbb{Q}(K) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{k} \end{bmatrix} \tag{9}$$

なお、

$$\mathbb{k} = \{ -J, -P, -m \}$$

（以上）