I-2 演算子法による連続梁の高次振動の解析

信州大学○学生員　林　俊治
正　員　谷本勉之助
正　員　夏目正太郎

1. 序論.

この論文は、いわゆるTimoshenko Beamの自由振動を取り扱ったもので、出発式の簡略化と、モード次数大なる時の誤差集積の少ない精度のよい解を得ること、又任意骨組への適用とを、ねらったものである。

2. Bacic Differential Equation.

梁の自由振動の微分方程式は、回転慣性とせん断力によるたわみとを考えればより正確なものとなる、以下に示す。

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial \rho^4} + \frac{\gamma L^2}{g}\frac{AL^2}{EI}\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} - \frac{\gamma L^2}{g}\left(\frac{1}{E}+\frac{1}{kG}\right)\frac{\partial^4 \omega}{\partial \rho^2 \partial t^2} + \left(\frac{\gamma L^2}{g}\right)^2 \frac{1}{E}\frac{1}{kG}\frac{\partial^4 \omega}{\partial t^4} = 0 . \tag{1}$$

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial \rho^4} + \frac{\gamma L^2}{g}\frac{AL^2}{EI}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\gamma L^2}{g}\left(\frac{1}{E}+\frac{1}{kG}\right)\frac{\partial^4 \psi}{\partial \rho^2 \partial t^2} + \left(\frac{\gamma L^2}{g}\right)^2 \frac{1}{E}\frac{1}{kG}\frac{\partial^4 \psi}{\partial t^4} = 0 . \tag{2}$$

ここに、ωはたわみであり、ψはせん断力が無視できる時のたわみ角である。

3. State Vector.

(1), (2)式より、状態量 $\{\omega, \theta, S, M\}$ を求める。

$\omega < \sqrt{\dfrac{AgkG}{\gamma I}}$ のとき、

$$\mathbb{W}(\rho,t) = \begin{bmatrix} \omega \\ \theta \\ S \\ M \end{bmatrix}_{\rho,t} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\lambda}{L} \\ 1 \\ \frac{EI\lambda}{L} \end{bmatrix}^{D} \begin{bmatrix} \cos\lambda\rho & \sin\lambda\rho & ch\mu\rho/ch\mu & sh\mu\rho/ch\mu \\ -\sin\lambda\rho & \cos\lambda\rho & \alpha sh\mu\rho/ch\mu & \alpha ch\mu\rho/ch\mu \\ -\xi\sin\lambda\rho & \xi\cos\lambda\rho & \eta sh\mu\rho/ch\mu & \eta ch\mu\rho/ch\mu \\ m\cos\lambda\rho & m\sin\lambda\rho & \alpha n ch\mu\rho/ch\mu & \alpha n sh\mu\rho/ch\mu \end{bmatrix} N e^{i\omega t}. \tag{3}$$

$\omega \geqq \sqrt{\dfrac{AgkG}{\gamma I}}$ のとき、

$$\mathbb{W}(\rho,t) = \begin{bmatrix} \omega \\ \theta \\ S \\ M \end{bmatrix}_{\rho,t} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\lambda}{L} \\ 1 \\ \frac{EI\lambda}{L} \end{bmatrix}^{D} \begin{bmatrix} \cos\lambda\rho & \sin\lambda\rho & \cos\mu\rho & \sin\mu\rho \\ -\sin\lambda\rho & \cos\lambda\rho & -\alpha\sin\mu\rho & \alpha\cos\mu\rho \\ -\xi\sin\lambda\rho & \xi\cos\lambda\rho & -\eta\sin\mu\rho & \eta\cos\mu\rho \\ m\cos\lambda\rho & m\sin\lambda\rho & \alpha n\cos\mu\rho & \alpha n\sin\mu\rho \end{bmatrix} N e^{i\omega t}. \tag{4}$$

hyperbolic型は、関数のあばれを静めるために、定数$ch\mu$で割ってある。

4. Key Equation.

(3), (4)式より、部材端の力量と変位量を結ぶ Key Equation. を作る。

$$\begin{bmatrix} \mathbb{V}(-1) \\ \mathbb{V}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{U}(-1) \\ \mathbb{U}(1) \end{bmatrix} . \qquad (5)$$

$$\mathbb{V}(\rho) = \begin{bmatrix} S \\ M \end{bmatrix}_{\rho}, \quad \mathbb{U}(\rho) = \begin{bmatrix} \omega \\ \theta \end{bmatrix}_{\rho}. \qquad (6)$$

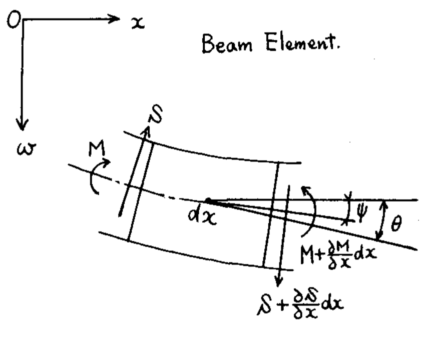

Fig-1

もちろん(3), (4)式の場合によりα, β, α′, β′は違う。

5. Tridiagonal Matrix Equation and Frequency Equation.

部材接点での Force Equilibrium Condition により、変位を未知量として次式が得られる。

$$\left[S(\omega) \right] \left\{ \mathbb{U} \right\} = 0 \qquad (7)$$

又 Frequency Equation は

$$\det \left[S(\omega) \right] = 0 \qquad (8)$$

である、この(8)式により固有振動数が得られる。

ここに $[S(\omega)]$ は常に三軸形になり、$[S(\omega)]$ の構成と掃出操作に綿密な注意を払えば、漸化方式で誤差を少なく解くことができる。

計算例	n = 1	
mode	λ	μ
1st	1.570 796 327	1.569 170 527
2nd	3.141 592 654	3.128 646 354
3rd	4.712 388 980	4.669 027 381
4th	6.283 185 307	6.181 476 337
5th	7.853 981 634	7.657 938 803
6th	9.424 777 961	9.091 300 996

6. Key Equation to the Rigidly-Supported Condition Beam.

剛支承連続梁では、Key Equation は簡単に、以下のようになる

$$\begin{bmatrix} M(-1) \\ M(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(-1) \\ \theta(1) \end{bmatrix} . \qquad (9)$$

スパン数1の場合の固有値 λ, μ を表に示す。

最後に、任意骨組への適用は、目下のところ計算中である。

（参考文献） 1). B. Tanimoto 「Free Vibration of Beams by the Operational Displacement Method」

2). S. Timoshenko 「Vibration Problems in Engineering」

3). F. Y. Cheng 「Vibration of Timoshenko Beams and Frameworks」 A.S.C.E.