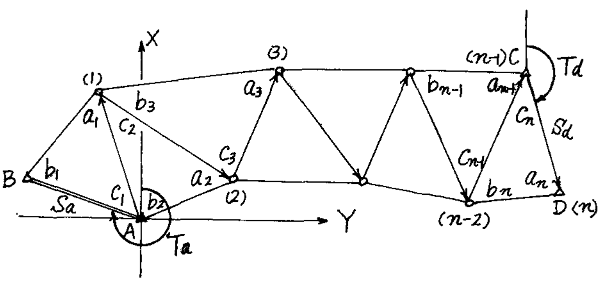
IV-91　単三角鎖の厳密解法について

熊本大学　正員　三池 亮次
東海大学　正員　○星田 義治

単三角鎖の厳密解は、三角形の内角の条件、測点における角の条件および検基線の座標条件を同時に満足するように、最小二乗法に基づいて解くことである。1個の検基線の座標条件は、検基線の一端における経緯距方向の座標条件（以下たんに座標条件という）と、検基線の方向角および辺条件の計4個存在する。ここでは単三角鎖の厳密解にマトリックス条件付直接測定解析[1]を適用するため、座標条件をテーラー展開によって線形化した。なお 測角の重さが等しく、また測点条件はないものとしているが、これに測点条件を考えた条件付間接測定の問題として解くことも、もちろん可能である。

図－1に示すような単三角鎖を考える。A, B, C, D は既知三角点でそのX, Y座標が既知である。したがって S_a, S_d および方向角 T_a, T_d は既知量となる。a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, ……
…… a_n, b_n, c_n は実測内角とすれば、条件式は次のように与えられる。



図－1　単三角鎖

1) 三角形の条件式

$$\varphi_i = w_i + \Delta a_i + \Delta b_i + \Delta c_i = 0 \qquad (1)$$

ここに

$$w_i = a_i + b_i + c_i - \pi \qquad i = 1, 2, 3, \cdots, n$$

2) 方向角の条件式

図－1の測点A{または(0)}, (1), (2), (3), ……, (n-2), C{または(n-1)} において、任意の辺のベクトル $\overrightarrow{i-1, i}$ の方向角を $\widehat{i-1, i}$、長さを $(i-1, i)$ と表記すれば

$$\widehat{i, i-1} = \widehat{A, B} + \sum_{k=1}^{i+1} (-1)^{k+1} c_k + i\pi$$

したがって、方向角 $\widehat{A, B}\ (= T_a)$ と $\widehat{C, D}\ (= T_d)$ の間に次の条件式が成立する。

$$\varphi_{n+1} \equiv w_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \Delta c_i = 0 \qquad (2)$$

ここに

$$w_{n+1} = (T_a - T_d) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} c_i + (n-1)\pi$$

3) 辺の条件式

基線ABの辺長 S_a と検基線CDの辺長 S_d {$= (n-1, n)$} の間に次の関係が成り立つ。

$$S_d = S_a \prod_{k=1}^{i+1} \frac{\sin b_k}{\sin a_k}$$

この式を線形化して

$$\varphi_{n+2} \equiv w_{n+2} + \sum_{i=1}^{n} \cot a_i \, \Delta a_i + \sum_{i=1}^{n} \cot b_i \, \Delta b_i = 0 \tag{3}$$

ここに　　$w_{n+2} = \left(\ln S_d + \sum_{i=1}^{n} \ln \sin a_i\right) - \left(\ln S_a + \sum_{i=1}^{n} \ln \sin b_i\right)$

であり、Δa_i . Δb_i の単位はラディアンである.

4) 座標の条件

図-2において、既知点Aの座標 (x_a, y_a) と既知点Cの座標 (x_c, y_c), の間に調整量が微小であるとして, テーラー展開の二次以上の項を省略すれば次の式が成立する*).

緯距の条件として　$\varphi_{n+3} \equiv w_{n+3} + \sum_{j=1}^{n-1}(\beta_{a_j} \cdot \Delta a_j) - \sum_{j=1}^{n-1}(\beta_{b_j} \Delta b_j) - \sum_{j=1}^{n-1}(\beta_{c_j} \Delta C_j) = 0$　(4)

経距の条件として　$\varphi_{n+4} \equiv w_{n+4} + \sum_{j=1}^{n-1}(\delta_{a_j} \cdot \Delta a_j) - \sum_{j=1}^{n-1}(\delta_{b_j} \cdot \Delta b_j) - \sum_{j=1}^{n-1}(\delta_{c_j} \cdot \Delta C_j) = 0$　(5)

ここに

$$w_{n+3} = X_c - X_a - \sum_{i=1}^{n-1} X_{i-1,i}\ ,\ \beta_{a_j} = \cot a_j \sum_{i=j}^{n-1} X_{i-1,i}\ ,\ \beta_{b_j} = \cot b_j \sum_{i=j}^{n-1} X_{i-1,i}\ ,\ \beta_{c_j} = (-1)^j \sum_{i=j}^{n-1} Y_{i-1,i}$$

$$w_{n+4} = Y_c - Y_a - \sum_{i=1}^{n-1} Y_{i-1,i}\ ,\ \delta_{a_j} = \cot a_j \sum_{i=j}^{n-1} Y_{i-1,i}\ ,\ \delta_{b_j} = \cot b_j \sum_{i=j}^{n-1} Y_{i-1,i}\ ,\ \delta_{c_j} = (-1)^j \sum_{i=j}^{n-1} X_{i-1,i}$$

$$X_{i-1,i} = S_a \prod_{k=1}^{i} \frac{\sin b_k}{\sin a_k} \cos\{\widehat{i-1,i}\}\ ,\quad Y_{i-1,i} = S_a \prod_{k=1}^{i} \frac{\sin b_k}{\sin a_k} \sin\{\widehat{i-1,i}\}$$

であり Δa_j . Δb_j . ΔC_j $(j = 1, 2, 3, \cdots, n)$ の単位はラディアンである.

マトリクス解析のための線型回帰模型と条件式は次の式を用いる.

$$\Delta \mathbb{y} = \mathbb{X}\Delta\boldsymbol{\beta} + e \qquad \varphi = \bar{a}_0 + \mathbb{A}\Delta\boldsymbol{\beta} \qquad \text{ただし } \Delta\mathbb{y} = \mathbb{y} - \bar{\mathbb{y}}\ ,\ \bar{a}_0 = a_0 + \mathbb{A}\boldsymbol{\beta}$$

この場合は、条件付直接測定であるから $\mathbb{X}$ は単位マトリックスである. これに観測データー**)を与えると次のように表示される. ($\bar{\mathbb{y}}$, $\Delta\mathbb{y}$, $\bar{\boldsymbol{\beta}}$, $\Delta\boldsymbol{\beta}$, α_i, γ_i については講演時にのべる。)

$$\bar{a}_0 = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ \\ w_9 \\ w_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 + C_1 - 180^\circ \\ a_2 + b_2 + C_2 - 180^\circ \\ a_3 + b_3 + C_3 - 180^\circ \\ a_4 + b_4 + C_4 - 180^\circ \\ a_5 + b_5 + C_5 - 180^\circ \\ a_6 + b_6 + C_6 - 180^\circ \\ (T_a - T_d) + \sum_{i=1}^{6}(-1)^{i+1} C_i + 5\times180^\circ \\ (\log S_d + \sum_{i=1}^{6} \log \sin a_i) \\ -(\log S_a + \sum_{i=1}^{6} \log \sin b_i) \\ (X_c - X_a) - \sum_{i=1}^{n-1} X_{i-1,i} \\ (Y_c - Y_a) - \sum_{i=1}^{n-1} Y_{i-1,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -60'' \\ -50'' \\ -30'' \\ -50'' \\ -10'' \\ -20'' \\ 15'' \\ 47 \\ \\ -0.09^{m} \\ -0.09^{m} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1 \\ 0&0&1&0&0&-1&0&0&1&0&0&-1&0&0&1&0&0&-1 \\ \alpha_1&-\gamma_1&0&\alpha_2&-\gamma_2&0&\alpha_3&-\gamma_3&0&\alpha_4&-\gamma_4&0&\alpha_5&-\gamma_5&0&\alpha_6&-\gamma_6&0 \\ \\ \beta_{a_1}&-\beta_{b_1}&-\beta_{c_1}&\beta_{a_2}&-\beta_{b_2}&-\beta_{c_2}&\beta_{a_3}&-\beta_{b_3}&-\beta_{c_3}&\beta_{a_4}&-\beta_{b_4}&-\beta_{c_4}&\beta_{a_5}&-\beta_{b_5}&-\beta_{c_5}&0&0&0 \\ \delta_{a_1}&-\delta_{b_1}&-\delta_{c_1}&\delta_{a_2}&-\delta_{b_2}&-\delta_{c_2}&\delta_{a_3}&-\delta_{b_3}&-\delta_{c_3}&\delta_{a_4}&-\delta_{b_4}&-\delta_{c_4}&\delta_{a_5}&-\delta_{b_5}&-\delta_{c_5}&0&0&0 \end{bmatrix}$$

計算結果および考察については講演時にのべる.

*) 土木学会論文報告集 (提出中)

**) 土橋忠則: 基準点測量, 実用測量シリーズ　山海堂　1967　P.226　P.228