IV-81　シンプレックス法を用いた等時間原則交通量配分

京都大学　正員　佐佐木綱
同　　　正員　○井上博司

1．まえがき

等時間原則による交通量配分は、最近ネットワーク理論との融合によってその計算方法が次第に実用化されつつある。等時間原則とは、各運転者は起終点間の走行所要時間が最短となる経路を選ぶという仮定であるが、走行所要時間が交通量の影響を受けることを前提としているため、最短経路が唯1本とは限らないことからこういう呼び方が行われているのである。

本文では等時間原則による交通量配分について、非線形の走行時間関数を解の近傍で線形近似して2次計画の問題に帰着させ、シンプレックス法によって解を得る方法を説明する。

2．定式化

いま、次のように記号を定義する。

S^i：OD i のOD交通量，　x_k^i：OD i パス k の交通量　（$k=1,2,\cdots,n$）

X_j：リンク j の全交通量，　$R^i=(r_{kj}^i)$：OD i の経路行列

$f_j(X)$：リンク j の走行所要時間，（交通量に関する単調増加関数）

$$\left(r_{kj}^i = \begin{cases} 1：\text{OD } i \text{ の経路 } k \text{ がリンク } j \text{ を通るとき} \\ 0：\text{OD } i \text{ の経路 } k \text{ がリンク } j \text{ を通らないとき} \end{cases} \right)$$

パスフローの和はOD交通量に等しいことから次式が成り立つ。

$$\sum_k x_k^i = S^i \tag{1}$$

リンク j を流れる全交通量は、リンク j を流れるすべてのパスフローを加算することにより、

$$\sum_i \sum_k r_{kj}^i x_k^i = X_j \tag{2}$$

と表わされる。また、パスフローは非負でなければならないから次式をうる。

$$x_k^i \geqq 0 \tag{3}$$

等時間原則による交通量配分は、制約条件(1)、(2)、(3)のもとで目標関数

$$F = -\sum_j \int_0^{X_j} f_j(X)\,dX \tag{4}$$

を最大にする問題と等価である。$f_j(X)$ は単調増加関数を仮定しているから目標関数は凹関数である。

いま、x_k^i の初期値を $x_k^{i(0)}$ としよう。式(2)により X_j の初期値は、

$$X_j^{(0)} = \sum_i \sum_k r_{kj}^i x_k^{i(0)} \tag{5}$$

となる。ここで、リンク j の走行所要時間を $X_j^{(0)}$ における接線で近似する。すなわち、

$$f_j(X_j) \simeq f_j(X_j^{(0)}) + \frac{df_j(X)}{dX}\bigg|_{X=X_j^{(0)}} (X_j - X_j^{(0)}) = a_j X_j + b_j \tag{6}$$

とする。ここに、$a_j = \frac{df_j(X)}{dX}\big|_{X=X_j^{(0)}}$，　$b_j = f_j(X_j^{(0)}) - X_j^{(0)} \frac{df_j(X)}{dX}\big|_{X=X_j^{(0)}}$　である。

式(6)を式(4)に代入すると、Fの近似値 F^* がえられる。

$$F^* = -\sum_j \int_0^{X_j} (a_j X + b_j)\,dX = -\sum_j \left\{ \frac{1}{2} a_j X_j^2 + b_j X_j \right\} \tag{7}$$

ここで、ある特定のゾーンペアー l 以外のパスフローをすべて固定し、特定のゾーンペアー l のパスフローのみを動かして F^* を最大にすることを考えると、これは2次計画の問題となる。2次計画

法における wolfe の解法を用いると、次のようにして解くことができる。

いま、ラグランジェの未定常数をλ^lとして次のラグランジェ関数をつくる。

$$\phi^l = -\sum_j \left\{ \frac{1}{2} a_j \left(\sum_i \sum_k r^i_{kj} x^i_k \right)^2 + b_j \sum_i \sum_k r^i_{kj} x^i_k \right\} - \lambda^l \left(S^l - \sum_k x^l_k \right) \tag{8}$$

ϕ^lをx^l_p, λ^lで偏微分すると次式をうる。

$$\frac{\partial \phi^l}{\partial x^l_p} = -\sum_j \left\{ a_j \left(\sum_i \sum_k r^i_{kj} x^i_k \right) r^l_{pj} + b_j r^l_{pj} \right\} + \lambda^l = -\sum_k e^l_{pk} x^l_k - w^l_p + \lambda^l \tag{9}$$

$$\frac{\partial \phi^l}{\partial \lambda^l} = \sum_k x^l_k - S^l \tag{10}$$

ここに、$e^l_{pk} = \sum_j a_j r^l_{pj} r^l_{kj}$, $w^l_p = \sum_j r^l_{pj} \left(a_j \sum_{i \neq l} \sum_k r^i_{kj} x^i_k + b_j \right)$ である。

F^* が最大となるための必要十分条件は、Kuhn-Tuckerの定理より次式が成り立つことである。

$$-\sum_k e^l_{pk} x^l_k - w^l_p + \lambda^l \leqq 0 \quad (11), \qquad \sum_k x^l_k - S^l = 0 \quad (13)$$

$$x^l_p \left(-\sum_k e^l_{pk} x^l_k - w^l_p + \lambda^l \right) = 0 \quad (12), \qquad x^l_p \geqq 0 \quad (p = 1, 2, \cdots\cdots, n) \quad (14)$$

ここで、スラック変数 $v^l_p \geqq 0$, 人為変数 $\mu^l_p \geqq 0$, $z^l \geqq 0$ を導入すると、式(11)〜(14)を満足する解 x^l_p $(p=1, 2, \cdots\cdots, n)$ を求めることは、制約条件

$$-\sum_k e^l_{pk} x^l_k + \lambda^l + v^l_p + \mu^l_p = w^l_p \quad (15), \qquad x^l_p \geqq 0,\ v^l_p \geqq 0,\ \mu^l_p \geqq 0,\ z^l \geqq 0 \quad (18)$$

$$\sum_k x^l_k + z^l = S^l \quad (16), \qquad (p = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

$$x^l_p v^l_p = 0 \quad (17),$$

のもとで、$z^l \rightarrow min\ (=0)$, $\sum_p \mu^l_p \rightarrow min\ (=0)$ とする線形計画問題に帰着する。これは2段階のシンプレックス法によって容易に解が得られる。ただし式(17)の条件があるから、x^l_p と v^l_p とが同時に基底に入らないようにする必要がある。

3. 配分計算の手順

配分計算の手順は次のようになっている。はじめにはゼロフロー時の走行所要時間を用いて、すべての起終点間の最短経路が決定され、各OD交通量はこのゼロフロー時の最短経路に予備配分される。

次に、予備配分された経路の走行所要時間の短い順に1ゾーンペアーが選ばれる。選ばれたゾーンペアーについて起終点間の最短経路を決定し、これまでに求められた起終点間のすべての経路を対象としてパスフローを修正配分するのである。修正配分の方法については上に述べた。こうして着目するゾーンペアーのパスフローおよび各リンクの走行所要時間が修正されると次のゾーンペアーに移る。

ゾーンペアーがすべてのODについて一巡するとまたもとのゾーンペアーにもどる。このような繰り返し修正計算は、繰り返しの回数を決めておくかあるいは各リンクの交通量が収束するまで続ける。

各リンクについて収束した値が求める配分交通量となる。

4. あとがき

本文では走行時間関数を非線形関数で仮定しているから、交通量が交通容量に近づくとその勾配が十分に大きくなるように走行時間関数を求めると、リンクの容量制限が可能となる。繰り返し修正計算の収束性についてもかなり良好である。なお、本文は参考文献 1)、2) をより一般化、系統化したものである。

参考文献

1) 井上博司「輸送計画的配分および等時間原則による配分に関する研究」, 土木学会第25回年次学術講演会講演集第4部

2) 佐佐木綱, 井上博司「非線形走行時間関数を用いた交通量配分」, 昭和45年度関西支部年次学術講演会講演概要, 土木学会関西支部