III−111 土質材料構成方程式の多相混合体としての考察 II

京都大学工学部 正員 足立紀尚

序論

巨視的にみて土質材料は固(土粒子骨格)，液(間げき水)，気(空気)三相から成る混合体と考えられる。したがって土質材料構成方程式の確立には各相間の相互作用を明らかにすることが大切である。今回は一固体と複数流体の混合体に対して，質量の交換と拡散が同時に生ずる場合の構成方程式の誘導を行なうが，主として Bowen[1] の手法を用いる。質量交換と拡散現象が同時に生ずる場合において，2 理想気体の混合体に対しては Dunwoody & Müller[2] が，Stokes 流体の混合体に対しては Ingram & Eringen[3] が，また n 個の弾性体の混合体に対しては Bowen[4] がそれぞれ構成方程式の誘導を行なっている。しかし固体と流体の混合体に対するものはまだ見られない。質量交換と拡散が同時に生ずる場合を考える理由は，粘性土における吸着水と自由水の質量交換が Creep 現象の原因と考えることと，不飽和土における溶解現象による影響を考慮すべき点などによる。一方混合体の構成変数に密度勾配，変形勾配を加えることは最初 Müller[5] が 2 流体混合体理論で導入したものであるが，Korteweg[6] は古く 1901 年に表面張力の効果を表わすのに連続体力学に導入している。先の吸着水と自由水の相互作用においても，とくに吸着水の密度勾配は重要な役割を果すと考えられるし，不飽和土においては表面張力の効果が大であることから土質材料構成方程式の変数に密度勾配，変形勾配を加えることは妥当と思う。

場の方程式

昨年[7]，Truesdell[6] と Müller[5] の考えに立って Green[7] らの客観性の手法を応用して，エネルギーの釣合式から場の方程式を求めたが，n 個の構成要素から成る混合体に対して Cartesian 座標を用いると

$$\sum_{\alpha}^{n} \overset{+}{c}^{(\alpha)}=0,\quad \sum_{\alpha}^{n} \overset{+}{m}_i^{(\alpha)}=0,\quad \sum_{\alpha}^{n} \overset{+}{M}_{ij}^{(\alpha)}=0,\quad \sum_{\alpha}^{n} \overset{+}{e}^{(\alpha)}=0 \qquad (1)$$

各構成要素の釣合式は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
\rho\overset{+}{c}^{(\alpha)} &= \frac{\partial \rho^{(\alpha)}}{\partial t}+(\rho^{(\alpha)}v_i^{(\alpha)})_{,i}\\
\rho\overset{+}{m}_i^{(\alpha)} &= \rho\overset{+}{c}^{(\alpha)}u_i^{(\alpha)}+\rho^{(\alpha)}\dot{v}_i^{(\alpha)}-\rho^{(\alpha)}b_i^{(\alpha)}-T_{ji,j}^{(\alpha)}\\
\rho\overset{+}{M}_{ij}^{(\alpha)} &= T_{ij}^{(\alpha)}-T_{ji}^{(\alpha)}\\
\rho\overset{+}{e}^{(\alpha)} &= \rho\overset{+}{c}^{(\alpha)}\left(\varepsilon^{(\alpha)}+\tfrac{1}{2}u_i^{(\alpha)}u_i^{(\alpha)}\right)+\rho\overset{+}{m}_i^{(\alpha)}u_i^{(\alpha)}+\rho^{(\alpha)}\dot{\varepsilon}^{(\alpha)}-\rho\overset{+}{c}^{(\alpha)}u_i^{(\alpha)}u_i^{(\alpha)}-T_{ji}^{(\alpha)}v_{i,j}^{(\alpha)}-h_{i,i}^{(\alpha)}-\rho^{(\alpha)}r^{(\alpha)}
\end{aligned} \qquad (2)$$

混合体全体に対して成立するという Truesdell らの考えに立つと，エントロピーの不等式は

$$\sum_{\alpha}^{n}\rho\overset{+}{\eta}^{(\alpha)}=\sum_{\alpha}^{n}\left[\rho^{(\alpha)}\dot{\eta}^{(\alpha)}+\rho\overset{+}{c}^{(\alpha)}\eta^{(\alpha)}+\left(\frac{h_i^{(\alpha)}}{\theta^{(\alpha)}}\right)_{,i}-\frac{\rho^{(\alpha)}r^{(\alpha)}}{\theta^{(\alpha)}}\right]\geq 0 \qquad (3)$$

で与えられる。ここに $\overset{+}{c}^{(\alpha)}$ は質量，$\overset{+}{m}_i^{(\alpha)}$ は運動量，$\overset{+}{M}_{ij}^{(\alpha)}$ は角運動量，$\overset{+}{e}^{(\alpha)}$ はエネルギー，$\overset{+}{\eta}^{(\alpha)}$ はエントロピーの α−構成要素に対する増分であり，$\rho^{(\alpha)}$ は密度，$v_i^{(\alpha)}$ は速度，$u_i^{(\alpha)}$ は拡散速度，$b_i^{(\alpha)}$ は物体力，$T_{ij}^{(\alpha)}$ は応力成分，$\varepsilon^{(\alpha)}$ は内部エネルギー，$h_i^{(\alpha)}$ は加熱流入量，$r^{(\alpha)}$ は輻射による物体加熱，$\eta^{(\alpha)}$ はエントロピー，$\theta^{(\alpha)}$ は温度を表わしている。それらの間には次の関係式が成立する。

$$u_i^{(\alpha)} = v_i^{(\alpha)} - v_i \ , \quad \rho v_i = \sum_{\alpha}^{n} \rho^{(\alpha)} v_i^{(\alpha)} \ , \quad \rho = \sum_{\alpha}^{n} \rho^{(\alpha)} , \quad \overset{\cdot}{(\varphi^{(\alpha)})} = \frac{\partial \varphi^{(\alpha)}}{\partial t} + v_i^{(\alpha)} \frac{\partial \varphi^{(\alpha)}}{\partial x_i} \qquad (4)$$

次に Bowen[1] らが用いた Massieu 関数と coldness を導入する。

$$\mathcal{M}^{(\alpha)} = \rho^{(\alpha)} \left(\eta^{(\alpha)} - \frac{\varepsilon^{(\alpha)}}{\vartheta^{(\alpha)}} \right) \qquad \text{Massieu の関数}$$
$$\theta^{(\alpha)} = \frac{1}{\vartheta^{(\alpha)}} \qquad \text{coldness} \qquad (5)$$

Massieu 関数は Helmholtz の自由エネルギー $A^{(\alpha)}$ と次の関係がある。

$$\mathcal{M}^{(\alpha)} = -\rho^{(\alpha)} \theta^{(\alpha)} A^{(\alpha)} \qquad (6)$$

(5) 式を (3) 式に代入することによって，エントロピー不等式は次式で与えられる。

$$\sum_{\alpha}^{n} \left\{ \dot{\mathcal{M}}^{(\alpha)} + \rho^{(\alpha)} \dot{\theta}^{(\alpha)} \varepsilon^{(\alpha)} + (\mathcal{M}^{(\alpha)} \delta_{ij} + \theta^{(\alpha)} T_{ij}^{(\alpha)}) v_{i,j}^{(\alpha)} - h_i^{(\alpha)} \theta_{,i}^{(\alpha)} + \rho \theta^{(\alpha)} \overset{+}{e}{}^{(\alpha)} + \frac{1}{2} \rho \theta^{(\alpha)} \overset{+}{c}{}^{(\alpha)} u_i^{(\alpha)} u_i^{(\alpha)} - \rho \theta^{(\alpha)} \overset{+}{m}{}_i^{(\alpha)} u_i^{(\alpha)} \right\} \geq 0 \qquad (7)$$

なお昨年は混合体としては単一体として運動するという Truesdell の考え方に従って，混合体全体と各構成要素の応力，内部エネルギー，加熱流入量などの関係式を求めて固定して考えたが，現在のところエントロピー不等式を矛盾なく説明できないので，ここでは導入せずに論議する。この点に関しては Green & Naghdi[8] にくわしく，混合体理論の論争点の一つである。

構成方程式

土質材料を一つの固相(土粒子骨格)と複数の流体の混合体と考え，構成方程式を誘導する．まず，各構成要素の $T_{ij}^{(\alpha)}$, $b_i^{(\alpha)}$, $\varepsilon^{(\alpha)}$, $\mathcal{M}^{(\alpha)}$, $h_i^{(\alpha)}$, $r^{(\alpha)}$, $\overset{+}{c}{}^{(\alpha)}$, $\overset{+}{m}{}_i^{(\alpha)}$, $\overset{+}{M}{}_{ij}^{(\alpha)}$ と $\overset{+}{e}{}^{(\alpha)}$ は構成要素の運動と温度によって決定されるが，これらは釣合式 (1), (2) と不等式 (7) を常に満足し，かつ系不依存であることが要求される。しかし $b_i^{(\alpha)}$, $r^{(\alpha)}$, $\overset{+}{M}{}_{ij}^{(\alpha)}$ は (2) 式において他の諸量が求まれば決定されるので，当初から考慮する必要はなく，結局 $T_{ij}^{(\alpha)}$, $\varepsilon^{(\alpha)}$, $\mathcal{M}^{(\alpha)}$, $h_i^{(\alpha)}$, $\overset{+}{c}{}^{(\alpha)}$, $\overset{+}{m}{}_i^{(\alpha)}$, $\overset{+}{e}{}^{(\alpha)}$ が $x_i^{(\beta)}$, $\rho^{(\beta)}$, $\theta^{(\beta)}$ $(\beta = 1, \cdots, n)$ の関数として表わされると考える。すなわち

$$(T_{ij}^{(\alpha)}, \varepsilon^{(\alpha)}, \mathcal{M}^{(\alpha)}, h_i^{(\alpha)}, \overset{+}{c}{}^{(\alpha)}, \overset{+}{e}{}^{(\alpha)}, \overset{+}{m}{}_i^{(\alpha)}) = f(x_i^{(\beta)}, \rho^{(\beta)}, \theta^{(\beta)}) \qquad (8)$$

この式はあまりにも一般的であるから，ここでは一個の固体と $n-1$ 個の流体の混合体が次の独立変数に依存するようなものであると仮定する。

$$\rho^{(\beta)}, \ x_{i,A}^{(1)}, \ \rho_{,i}^{(\beta)}, \ x_{i,AB}^{(1)}, \ v_{i,j}^{(\gamma)}, \ v_i^{(\beta)}, \ \theta^{(\beta)}, \ \theta_{,i}^{(\beta)} \qquad (\beta = 1, \cdots, n, \quad \gamma = 2, \cdots, n) \qquad (9)$$

ここで密度勾配 $\rho_{,i}^{(\beta)}$ と変形勾配 $x_{i,AB}^{(1)}$ を導入したのは先に述べたように，粘性土の場合における吸着水の問題や不飽和土における表面張力の問題を考えるときに重要であると考えるから Korteweg や Müller の概念を導入した。質量の交換 $\overset{+}{c}{}^{(\alpha)}$ については，まだ具体的に考えがまとまっていないが，例えば，粘性土における二次圧密の現象は外部作用によって吸着水と自由水間に非平衡状態が生じ(不安定は密度勾配になる)その結果吸着水から自由水への質量変換が生ずるのではないかと考えている。その過程に速度過程理論などが適用できることがわかるとより具体的になるであろう。また密度自体，量的には微小であるが，不飽和土における空気の間げき水への溶解は力学特性に多大の効果を与えるので無視できない。イオン交換も質量交換の一つである。これらが土質材料を混合体と考える時に密度勾配，変形勾配を変数に加え，質量の相互作用を考慮すべきである理由である。むろん，ここで選んだ独立変数は限られたものであり，理論そのものは特別なものであることは当然である。しかし逆にまたこれらの変数に平等に依存するという保証もない。今一つ重要なことは equipresence

の原理を用いるが，このことは各構成要素に特有な固体，流体としての性質が他の構成要素，さらに混合体全体に影響するという仮定に相当する。この原理の価値を含めて上記のことは実験的に検証する以外に方法がないことは自明である。この点は Dunwoody[9] も述べているように混合体理論の未解決の問題の一つである。

問題を簡単にするため，一等方性固体と複数個の簡単な流体[10]の混合体であると仮定すると，material frame indifference と等方性の仮定によって(9)式の変数は次のように限定されたものとなる。

$$\rho^{(\beta)},\ c_{ij}^{(1)},\ \rho_{,i}^{(\beta)},\ K_{ijk}^{(1)},\ D_{ij}^{(\gamma)},\ W_{ij}^{(\delta 2)},\ v_i^{(\gamma 1)},\ \theta^{(\beta)},\ \theta_{,i}^{(\beta)}\quad(\gamma=2,\cdots,n,\ \delta=3,\cdots,n)\tag{10}$$

ここに

$$c_{ij}^{(1)}=x_{i,A}\,x_{j,A},\quad K_{ijk}^{(1)}=x_{i,AB}\,X_{A,j}\,X_{B,k},\quad D_{ij}^{(\gamma)}=\frac{1}{2}\left(v_{i,j}^{(\gamma)}+v_{j,i}^{(\gamma)}\right)$$
$$W_{ij}^{(\delta 2)}=\frac{1}{2}\left(v_{i,j}^{(\delta)}-v_{j,i}^{(\delta)}\right)-\frac{1}{2}\left(v_{i,j}^{(2)}-v_{j,i}^{(2)}\right),\quad v_i^{(\gamma 1)}=v_i^{(\gamma)}-v_i^{(1)}\tag{11}$$

系不依存性によって，速度場と spin Tensor は二構成要素の相対的なものを用いるべきことが結論づけられるから，速度場は第一構成要素，すなわち固体に対する相対速度 $v_i^{(\gamma 1)}$ を，spin Tensor は流体相のみであるから，第二の構成要素，例えば吸着水相に対する相対的なものと考える，$W_{ij}^{(\delta 2)}$。したがって，この混合体に対する構成方程式は次のように与えられる。

$$T_{ij}^{(\alpha)}=T_{ij}^{(\alpha)}\left(\rho^{(\beta)},\ c_{ij}^{(1)},\ \rho_{,i}^{(\gamma)},\ K_{ijk}^{(1)},\ D_{ij}^{(\gamma)},\ W_{ij}^{(\delta 2)},\ v_i^{(\gamma 1)},\ \theta^{(\beta)},\ \theta_{,i}^{(\beta)}\right)$$
$$\psi^{(\alpha)}=\psi^{(\alpha)}\left(\rho^{(\beta)},\ c_{ij}^{(1)},\ \rho_{,i}^{(\gamma)},\ K_{ijk}^{(1)},\ D_{ij}^{(\gamma)},\ W_{ij}^{(\delta 2)},\ v_i^{(\gamma 1)},\ \theta^{(\beta)},\ \theta_{,i}^{(\beta)}\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\overset{+}{e}^{(\alpha)}=\overset{+}{e}^{(\alpha)}\left(\rho^{(\beta)},\ c_{ij}^{(1)},\ \rho_{,i}^{(\gamma)},\ K_{ijk}^{(1)},\ D_{ij}^{(\gamma)},\ W_{ij}^{(\delta 2)},\ v_i^{(\gamma 1)},\ \theta^{(\beta)},\ \theta_{,i}^{(\beta)}\right)\tag{12}$$

これらの構成方程式はエントロピー不等式(7)を満足しなければならない，すなわち(7)式によって制約を受けることになる。関係式

$$\left(\varphi^{(\beta)}\right)'^{(\alpha)}=\dot{\varphi}^{(\beta)}+\varphi_{,i}^{(\beta)}\left(v_i^{(\alpha)}-v_i^{(\beta)}\right)\tag{13}$$

を用いて $\dot{\psi}^{(\alpha)}$ を計算し(7)式に代入した後，$\psi=\sum_\alpha^n\psi^{(\alpha)}$ なる関係を導入すると

$$\sum_\alpha^n\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta^{(\alpha)}}+\rho^{(\alpha)}\varepsilon^{(\alpha)}\right)\dot{\theta}^{(\alpha)}+\sum_\alpha^n\left[\sum_\beta^n\frac{\partial\psi^{(\beta)}}{\partial\theta^{(\alpha)}}\left(v_i^{(\beta)}-v_i^{(\alpha)}\right)-h_i^{(\alpha)}\right]\theta_{,i}^{(\alpha)}+\sum_\alpha^n\frac{\partial\psi}{\partial\theta_{,i}^{(\alpha)}}\dot{\theta}_{,i}^{(\alpha)}+\sum_\alpha^n\sum_\beta^n\frac{\partial\psi^{(\beta)}}{\partial\theta_{,i}^{(\alpha)}}\theta_{,ij}^{(\alpha)}\left(v_j^{(\beta)}-v_j^{(\alpha)}\right)$$
$$+\sum_\alpha^n\rho\theta^{(\alpha)}\left(\overset{+}{e}^{(\alpha)}+\frac{1}{2}\overset{+}{c}^{(\alpha)}u_i^{(\alpha)}u_i^{(\alpha)}-\overset{+}{m}_i^{(\alpha)}u_i^{(\alpha)}\right)+\sum_\alpha^n\Big\{\left(\psi^{(\alpha)}\delta_{ij}+\theta^{(\alpha)}T_{ij}^{(\alpha)}\right)v_{i,j}^{(\alpha)}+\frac{\partial\psi}{\partial\rho^{(\alpha)}}\dot{\rho}^{(\alpha)}+\frac{\partial\psi^{(\alpha)}}{\partial c_{ij}^{(1)}}\dot{c}_{ij}^{(1)}$$
$$+\sum_{\gamma=2}^n\frac{\partial\psi^{(\alpha)}}{\partial v_i^{(\gamma 1)}}\left[v_{i,j}^{(\gamma 1)}\left(v_j^{(\alpha)}-v_j^{(\gamma)}\right)-v_{i,j}^{(1)}v_j^{(\gamma 1)}\right]\Big\}+\sum_{\gamma=2}^n\frac{\partial\psi}{\partial D_{ij}^{(\gamma)}}\dot{D}_{ij}^{(\gamma)}+\sum_{\delta=3}^n\frac{\partial\psi}{\partial W_{ij}^{(\delta 2)}}\dot{W}_{ij}^{(\delta 2)}+\sum_{\gamma=2}^n\frac{\partial\psi}{\partial v_i^{(\gamma 1)}}\dot{v}_i^{(\gamma 1)}$$
$$+\sum_\alpha^n\sum_{\delta=3}^n\frac{\partial\psi^{(\alpha)}}{\partial W_{ij}^{(\delta 2)}}W_{ij,k}^{(\delta 2)}v_k^{(\alpha)}-\sum_{\delta=3}^n\frac{\partial\psi}{\partial W_{ij}^{(\delta 2)}}\left[v_k^{(\delta)}W_{ij,k}^{(\delta 2)}+W_{ij,k}^{(2)}\left(v_k^{(\delta)}-v_k^{(2)}\right)\right]+\sum_{\gamma=2}^n\frac{\partial\psi}{\partial\rho_{,i}^{(\gamma)}}\dot{\rho}_{,i}^{(\gamma)}+\frac{\partial\psi}{\partial K_{ijk}^{(1)}}\dot{K}_{ijk}^{(1)}$$
$$+\sum_\alpha^n\sum_\beta^n\frac{\partial\psi^{(\alpha)}}{\partial\rho^{(\beta)}}\rho_{,i}^{(\beta)}\left(v_i^{(\alpha)}-v_i^{(\beta)}\right)+\sum_\alpha^n\frac{\partial\psi^{(\alpha)}}{\partial c_{ij}^{(1)}}c_{ij,k}^{(1)}\left(v_k^{(\alpha)}-v_k^{(1)}\right)+\sum_\alpha^n\left[\sum_{\gamma=2}^n\frac{\partial\psi^{(\alpha)}}{\partial\rho_{,i}^{(\gamma)}}\rho_{,ij}^{(\gamma)}\left(v_j^{(\alpha)}-v_j^{(\gamma)}\right)+\frac{\partial\psi^{(\alpha)}}{\partial K_{ijk}^{(1)}}K_{ijk,l}^{(1)}\left(v_l^{(\alpha)}-v_l^{(1)}\right)\right]\geq 0\tag{14}$$

ここに変数の選び方によって(14)式は $\dot{\rho}_{,i}^{(\gamma)},\ \rho_{,ij}^{(\gamma)},\ \dot{K}_{ijk}^{(1)},\ K_{ijk,l}^{(1)},\ \dot{D}_{ij}^{(\gamma)},\ D_{ij,k}^{(\gamma)},\ \dot{W}_{ij}^{(\delta 2)},\ \dot{v}_i^{(\gamma 1)},\ \dot{\theta}^{(\beta)},\ \theta_{,ij}^{(\beta)}$, $\dot{\theta}_{,i}^{(\beta)}$ の任意の値に対しても常に成立すべきであるから次の結論が得られる。

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta^{(\alpha)}}+\rho^{(\alpha)}\varepsilon^{(\alpha)}=0,\quad\frac{\partial\psi}{\partial\theta_{,i}^{(\alpha)}}=0,\quad\frac{\partial\psi}{\partial\rho_{,i}^{(\gamma)}}=0,\quad\frac{\partial\psi}{\partial K_{ijk}^{(1)}}=0,\quad\frac{\partial\psi}{\partial D_{ij}^{(\gamma)}}=0,\quad\frac{\partial\psi}{\partial W_{ij}^{(\delta 2)}}=0,\quad\frac{\partial\psi}{\partial v_i^{(\gamma 1)}}=0$$
$$\sum_\alpha^n\frac{\partial\psi^{(\alpha)}}{\partial\rho_{,i}^{(\gamma)}}u_j^{(\alpha)}+\sum_\alpha^n\frac{\partial\psi^{(\alpha)}}{\partial\rho_{,j}^{(\gamma)}}u_i^{(\alpha)}=0,\quad\sum_\alpha^n\frac{\partial\psi^{(\alpha)}}{\partial\rho_{,i}^{(\beta)}}u_j^{(\alpha)}+\sum_\alpha^n\frac{\partial\psi^{(\alpha)}}{\partial\rho_{,j}^{(\gamma)}}u_i^{(\alpha)}=0\tag{15}$$

また任意の $D_{ij,k}^{(\gamma)},\ W_{ij,k}^{(\delta 2)},\ K_{ijk,l}^{(1)}$ に対して次式がそれぞれ満足されなければならない。

$$\sum_\alpha^n\frac{\partial\psi^{(\alpha)}}{\partial D_{ij}^{(\gamma)}}v_k^{(\alpha)}D_{ij,k}^{(\gamma)}=0,\quad\sum_\alpha^n\frac{\partial\psi^{(\alpha)}}{\partial W_{ij}^{(\delta 2)}}v_k^{(\alpha)}W_{ij,k}^{(\delta 2)}=0,\quad\sum_\alpha^n\frac{\partial\psi^{(\alpha)}}{\partial K_{ijk}^{(1)}}v_l^{(\alpha)}K_{ijk,l}^{(1)}=0\tag{16}$$

(15), (16) 式を (14) 式に用いると不等式は

$$\sum_{\alpha}^{n}\Big[\sum_{\beta}^{n}\frac{\partial\psi^{(\beta)}}{\partial\theta^{(\alpha)}}(v_i^{(\beta)}-v_i^{(\alpha)})-h_i^{(\alpha)}\Big]\theta_{,i}^{(\alpha)}+\sum_{\alpha}^{n}\rho\theta^{(\alpha)}\Big(\overset{+}{e}{}^{(\alpha)}+\frac{1}{2}\overset{+}{c}{}^{(\alpha)}u_i^{(\alpha)}u_i^{(\alpha)}-\overset{+}{m}{}_i^{(\alpha)}u_i^{(\alpha)}\Big)$$
$$+\sum_{\alpha}^{n}\Big[\Big((\psi^{(\alpha)}\delta_{ij}+\theta^{(\alpha)}T_{ij}^{(\alpha)}\Big)v_{i,j}^{(\alpha)}+\frac{\partial\psi}{\partial\rho^{(\alpha)}}\dot{\rho}^{(\alpha)}+\frac{\partial\psi}{\partial c_{ij}^{(1)}}\dot{c}_{ij}^{(1)}+\sum_{\gamma=2}^{n}\frac{\partial\psi^{(\alpha)}}{\partial v_i^{(\gamma)}}\dot{v}_{i,j}^{(\gamma)}v_j^{(\alpha)}\Big]+\sum_{\alpha}^{n}\sum_{\beta}^{n}\frac{\partial\psi^{(\alpha)}}{\partial\rho^{(\beta)}}\rho_{,i}^{(\beta)}(v_i^{(\alpha)}-v_i^{(\beta)})$$
$$+\sum_{\alpha}^{n}\frac{\partial\psi^{(\alpha)}}{\partial c_{ij}^{(1)}}(c_{ij,k}^{(1)}(v_k^{(\alpha)}-v_k^{(\beta)})\ \geq 0 \qquad (17)$$

さらに関係式 $\dot{\rho}^{(\alpha)}=\rho\overset{+}{c}{}^{(\alpha)}-\rho^{(\alpha)}v_{i,j}^{(\alpha)}\delta_{ij}$ と $\dot{c}_{ij}^{(1)}=2v_{i,k}^{(1)}c_{jk}^{(1)}$ を代入して計算を進めると固体と流体相に分離した式が求まる。

$$-\sum_{\alpha}^{n}h_i^{(\alpha)}\theta_{,i}^{(\alpha)}+\Big[\sum_{\beta}^{n}\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial\theta^{(\beta)}}\theta_{,i}^{(\beta)}-\frac{\partial\psi}{\partial\theta^{(1)}}\theta_{,i}^{(1)}+\sum_{\beta}^{n}\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial\rho^{(\beta)}}\rho_{,i}^{(\beta)}-\frac{\partial\psi}{\partial\rho^{(1)}}\rho_{,i}^{(1)}+\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial c_{jk}^{(1)}}c_{jk,i}^{(1)}-\frac{\partial\psi}{\partial c_{jk}^{(1)}}c_{jk,i}^{(1)}-\rho\theta^{(1)}\overset{+}{m}{}_i^{(1)}\Big]u_i^{(1)}$$
$$+\sum_{\gamma=2}^{n}\Big[\sum_{\beta}^{n}\frac{\partial\psi^{(\gamma)}}{\partial\theta^{(\beta)}}\theta_{,i}^{(\beta)}-\frac{\partial\psi}{\partial\theta^{(\gamma)}}\theta_{,i}^{(\gamma)}+\sum_{\beta}^{n}\frac{\partial\psi^{(\gamma)}}{\partial\rho^{(\beta)}}\rho_{,i}^{(\beta)}-\frac{\partial\psi}{\partial\rho^{(\gamma)}}\rho_{,i}^{(\gamma)}+\frac{\partial\psi^{(\gamma)}}{\partial c_{jk}^{(1)}}c_{jk,i}^{(1)}-\rho\theta^{(\gamma)}\overset{+}{m}{}_i^{(\gamma)}\Big]u_i^{(\gamma)}$$
$$+\sum_{\alpha}\rho\theta^{(\alpha)}\Big[\overset{+}{e}{}^{(\alpha)}+\Big(\frac{1}{\theta^{(\alpha)}}\frac{\partial\psi}{\partial\rho^{(\alpha)}}+\frac{1}{2}u_i^{(\alpha)}u_i^{(\alpha)}\Big)\overset{+}{c}{}^{(\alpha)}\Big]+\Big[(\psi^{(1)}\delta_{ij}+\theta^{(1)}T_{ij}^{(1)})-\frac{\partial\psi}{\partial\rho^{(1)}}\rho^{(1)}\delta_{ij}+\frac{\partial\psi}{\partial c_{ik}^{(1)}}c_{jk}^{(1)}-\sum_{\gamma=2}^{n}\sum_{\alpha}^{n}\frac{\partial\psi^{(\alpha)}}{\partial v_i^{(\gamma)}}u_j^{(\alpha)}\Big]v_{i,j}^{(1)}$$
$$+\sum_{\gamma=2}^{n}\Big[\psi^{(\gamma)}\delta_{ij}+\theta^{(\gamma)}T_{ij}^{(\gamma)}-\frac{\partial\psi}{\partial\rho^{(\gamma)}}\rho^{(\gamma)}\delta_{ij}+\sum_{\alpha}\frac{\partial\psi^{(\alpha)}}{\partial v_i^{(\gamma)}}u_j^{(\alpha)}\Big]v_{i,j}^{(\gamma)}\ \geq 0 \qquad (18)$$

(15) 式から直ちに次の結論が求まる

$$\psi=\psi(\rho^{(\beta)},c_{ij}^{(1)},\theta^{(\beta)})-\sum_{\alpha}^{n}\psi^{(\alpha)}$$
$$\varepsilon^{(\alpha)}=-\frac{1}{\rho^{(\alpha)}}\frac{\partial\psi}{\partial\theta^{(\alpha)}}=\varepsilon^{(\alpha)}(\rho^{(\beta)},c_{ij}^{(1)},\theta^{(\beta)}) \qquad (19)$$

(12) 式における変数の選び方によって，固体相は変形速度 $D_{ij}^{(1)}$ に依存しないと仮定した。このことは固体が弾性体であることを意味する。したがって不等式 (18) の最後から2項目における $v_{i,j}^{(1)}$ の任意の値に対して (18) 式が常に成立すべきことから，固体に対する応力 $T_{ij}^{(1)}$ は次のように求まる。

$$T_{ij}^{(1)}=\frac{1}{\theta^{(1)}}\Big[-\psi^{(1)}\delta_{ij}+\frac{\partial\psi}{\partial\rho^{(1)}}\rho^{(1)}\delta_{ij}-\frac{\partial\psi}{\partial c_{ik}^{(1)}}c_{jk}^{(1)}+\sum_{\gamma=2}^{n}\sum_{\alpha}^{n}\frac{\partial\psi^{(\alpha)}}{\partial v_i^{(\gamma)}}v_j^{(\alpha)}\Big] \qquad (20)$$

すなわち応力は ψ と (15), (16) 式を満足するように選ばれた $\psi^{(\alpha)}$ を与えることから求まる。一方流体相の応力 $T_{ij}^{(\gamma)}$ は ψ と $\psi^{(\alpha)}$ とともに $T_{ij}^{(\gamma)}$ を与え (18) 式を満足するようにして決定できるが，これらを含め $\overset{+}{c}{}^{(\alpha)}$, $\overset{+}{m}{}_i^{(\alpha)}$ などに具体的な関数形を与えることが次の議論である。

参考文献

(1) R.M. Bowen & D.J. Garicia, (1970), Int. J. Eng. Sci., Vol. 8, pp. 63-83
(2) N.T. Dunwoody & I. Müller, (1968), Arch. Rat. Mech. Anal., Vol. 29, pp. 344-369
(3) J.D. Ingram & A.C. Eringen, (1967), Int. J. Eng. Sci., Vol. 5, pp. 289-322
(4) R.M. Bowen, (1969), Arch. Rat. Mech. Anal., Vol. 34, pp. 97-127
(5) I. Müller, (1968), Arch. Rat. Mech. Anal., Vol. 28, pp. 1-39
(6) C. Truesdell & W. Noll, (1965), Handbuch der Physik Ⅲ/3, Springer pp. 513-515
(7) 足立紀尚, (1970), 土木学会第25回年次学術講演会講演集 第3部, pp. 73-76
(8) A.E. Green & P.M. Naghdi, (1969), Quart J. Mech. Appl. Math., Vol. 22, pp. 427-438
(9) N.T. Dunwoody (1970), Arch. Rat. Mech. Anal., Vol. 38, pp. 349-371
(10) W. Noll, (1955), J. Rat. Mech. Anal., Vol. 1, pp. 3-80.