

III-84 先端角の差異によるくい先端支持力について

名城大学理工学部土木工学教室 正会員 柴田道生

1. 緒言

筆者は、実験砂槽における模型くいの載荷実験から、先端円錐角は鋭角のくいより鈍角のくいより、くい頭荷重のくい先への伝達率が大きく、従つて、先端軸力は、鋭角のくいより大きく計測されることを明らかにした。本文は、この事実の裏付けについで静的並びに、動的の両面よりの理論解析を行つたものである。

2. 先端支持力の静的解析

いま、本体の長さ l の二倍のくいにおいて、一は、先端円錐角が 60° 、他の一は、 30° のものをとりあげて、この両者の先端支持力を比較してみる。本体の長さ l は、両者共、同一であるから、周面摩擦抵抗力は同一と方へて、先端円錐部のみを注視する。

図-1 において、BC 端面が受くる応力を q 、土の内部摩擦角を φ とする。円錐斜面の任意の一点 D に接する地盤の剪断抵抗力を c とすると、 c は、単位面積当り受働土圧の鉛直成分に $\tan \varphi$ を乗じた値に等しい。

いま、単位面積当りの受働土圧を P_u とすると

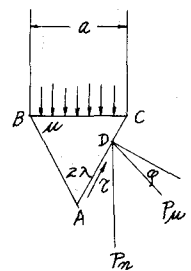
$$P_u = \omega l K_p \dots \dots \dots (1)$$

但し、 ω : 土の単位重量

l : くい長さ

K_p : 受働土圧係数

図-1



とて、受働土圧の鉛直成分を P_n とすると

$$\cos \left\{ \frac{\pi}{2} - (\lambda + \varphi) \right\} = \frac{P_n}{P_u} \quad \therefore P_n = P_u \sin (\lambda + \varphi) \dots \dots \dots (2)$$

従つて c は $c = P_n \tan \varphi \dots \dots \dots (3)$ (3)式に(1)式、(2)式を代入すると

$$c = \omega l K_p \sin (\lambda + \varphi) \tan \varphi \dots \dots \dots (4)$$

即ち、先端角の値によつて、 c の値は異なる。土の応力は、其の土固有の内部摩擦角より超へない。且つ土の剪断破壊は、剪断応力と剪断変位が、地盤が破壊するまでは、直線関係にあり、且つ地盤が剪断破壊する極限状態では、(4)式の示す c は、最大値を示し、一定値である。次に図-1 において、端面 BC に q の応力を受くる円錐体 BCA の力の釣合から次の(5)式が成立する。即ち

$$\frac{a q}{2} = (P_u \sin \varphi + c) \frac{a}{2} \tan \mu + P_u \frac{a}{2} \cos \varphi \dots \dots \dots (5)$$

$$\begin{aligned} \therefore q &= P_u \sin \varphi \tan \mu + c \tan \mu + P_u \cos \varphi \\ &= P_u \frac{\cos (\mu - \varphi)}{\cos \mu} + c \tan \mu \dots \dots \dots (6) \end{aligned}$$

(6) 式に (4) 式を代入すると

$$\bar{q} = p_{\mu} \frac{\cos(\mu - \varphi)}{\cos \mu} + \omega l K_p \sin(\lambda + \varphi) \tan \varphi \tan \mu$$

而して p_{μ} は (1) 式に示されるから

$$\bar{q} = \omega l K_p \frac{\cos(\mu - \varphi)}{\cos \mu} + \omega l K_p \sin(\lambda + \varphi) \tan \varphi \tan \mu \quad \text{----- (7)}$$

次に、図-2 に示して、くい先端鉛直方向に σ_0 は次の (8) 式

によって与えられる。即ち

$$\sigma_0 = \frac{1}{1 - \frac{1}{m}} \cdot \frac{3\bar{q}}{2} F(r, Z) \quad \text{----- (8)}$$

但し $F(r, Z)$ は

$$\begin{aligned} F(r, Z) = & \left[\frac{1 - \frac{2}{m}}{6} Z_1 \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} - \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_1} \right) + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \left(\frac{Z_1}{R_1} \right)^3 \right. \\ & \left. + \left\{ \frac{3 - \frac{4}{m}}{2} Z_2 - l \left(1 - \frac{2}{m} \right) \right\} \left(\frac{1}{3Z_2} - \frac{Z_2^2}{3R_2^3} \right) - lZ(2-l) \left(\frac{Z_2^2}{R_2^3} - \frac{1}{R_2^3} \right) \right] \end{aligned} \quad \text{----- (9)}$$

で示される。ここで $\frac{1}{m}$ は土のポアソン比である。

従つて、鉛直方向 σ_0 は (8) 式に、(7) 式、(9) 式を代入することによって求めることができる。即ち

$$\sigma_0 = \frac{3}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{m}} \left\{ \omega l K_p \frac{\cos(\mu - \varphi)}{\cos \mu} + \omega l K_p \sin(\lambda + \varphi) \tan \varphi \tan \mu \right\} F(r, Z) \quad \text{----- (10)}$$

いま、くいの長さ l が長い場合、(9) 式の各項は零に近似し、数値として表はれる項は

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{6} \left(\frac{Z_1}{R_1} \right)^3 \text{ の項のみであるから } F(r, Z) = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \left(\frac{Z_1}{R_1} \right)^3 \text{ として取扱ふ。}$$

又 (7) 式によつて、 $\bar{q}$ が求まるから、くい先端支持力 R_p は $R_p = \pi a^2 \bar{q}$ ----- (11)

次に、くい先端円錐角 30° の場合と、 60° の場合を取りあげ、両者のくいの σ_0 と、 R_p を計算してみる。

(i) 先端円錐角 30° の場合 $\frac{1}{m} = 0.3$ $\omega = 1800 \text{ kg/m}^3$ $l = 1 \text{ m}$ $K_p = 3$ $\mu = 75^\circ$

$$\varphi = 30^\circ \quad \lambda = 15^\circ \quad R_1 = 0.3 \text{ m} \quad Z_1 = 0.29 \text{ m}$$

$$F(r, Z) = 0.02 \quad (10) \text{ 式より } \sigma_0 = 984 \text{ kg/m}^2$$

$$(7) \text{ 式より } \bar{q} = 22977 \text{ kg/m}^2$$

$$(11) \text{ 式より } R_p = 405 \text{ kg}$$

(ii) 先端円錐角 60° の場合 $\frac{1}{m} = 0.3$ $\omega = 1800 \text{ kg/m}^3$ $l = 1 \text{ m}$ $K_p = 3$ $\mu = 60^\circ$

$$\varphi = 30^\circ \quad \lambda = 30^\circ \quad R_1 = 0.15 \text{ m} \quad Z_1 = 0.14 \text{ m}$$

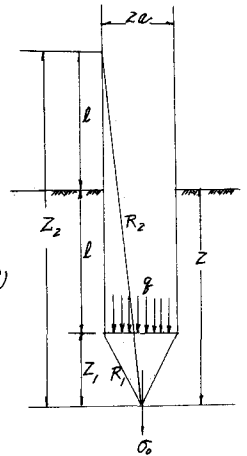
$$F(r, Z) = 0.03 \quad (10) \text{ 式より } \sigma_0 = 900 \text{ kg/m}^2$$

$$(7) \text{ 式より } \bar{q} = 14029 \text{ kg/m}^2$$

$$(11) \text{ 式より } R_p = 248 \text{ kg}$$

即ち先端支持力 R_p 及先端鉛直方向応力 σ_0 は、先端円錐角 30° の鋭角より、 60° の鈍角より大きい数値として表はれている。

図-2



3. 先端支持力の動的解析

図-3 において、 l の先端円錐部のみを考え、円錐部端の半径を r_0 、

円錐部の任意の点の半径を r とし、 $r = r_0 e^{-\alpha x}$ で表はされる如く、指数的に

変化するものとする。従つて断面積 $S = \pi r^2 = \pi r_0^2 e^{-2\alpha x}$ 、 $x=0$ に於ける

断面積を S_0 とすると、 $S_0 = \pi r_0^2$ 、従つて $S = S_0 e^{-2\alpha x}$ 、いま円錐部を

長さ l とし、この円錐体が両端自由で横振動する場合を考えると、 l の固有振動数

f は $f = \frac{(\beta l)^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$ で示される。但し ρ : l の密度 E : l の弾性係数 図-3

βl は一次振動の根で、 $\beta l = 1.5056\pi$ 、 $1 = \frac{\pi D^4}{64}$ 、 $S = \pi (\frac{D}{2})^2$ 、面半径 $r = \frac{D}{2}$ 、

但し D : l の直径とする。従つて $f = \frac{(1.5056)^2 r'}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ 、さて、 l の径 $r = r_0 e^{-\alpha x}$ のように、先端

に向つて指数的に変化する場合の固有振動数は $\frac{(\alpha l)^2}{\pi^2}$ を附加して、 $f = \frac{(1.5056)^2 r'}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho(1 + \frac{\alpha^2 l^2}{\pi^2})}}$ で示される。又円振動数 $p = 2\pi f$ で計算される。

いま、 $r_0 = 15\text{cm}$ の l の先端円錐角 30° の場合、円錐部の長さ 18.0cm 、先端円錐角 60° の場合、円錐部

の長さ 8.5cm の両者をとりて考えると、便りに $r = 5\text{cm}$ にすると $\frac{r_0}{r} = \frac{15\text{cm}}{5\text{cm}} = 3$ 、 $e^{\alpha l} = 3$ 、

$\alpha l = \log_e 3 = 1.099$ 、 $E = 1 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ 、 $\rho = 1.6 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$ として f の値を計算すると、先端角

30° の場合 $f = 2.5159$ 、 $p = 15.7998$ 、先端角 60° の場合 $f = 11.2844$ 、 $p = 70.866$ を得る。

3-1. l の横振動による l の各点の振幅

l の長さ方向に x 軸をとり、 l の横振動による変位を μ とすると、運動方程式は

$$\rho S \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 \mu}{\partial x^4} = 0 \quad (12)$$

但し ρ : l の密度、 S : l の断面積、 t : 時間、

I : l の断面二次モーメント、 E : l の弾性係数

l の運動を正弦運動と考えると $\mu(x, t) = \mu(x) \sin p t$ (13) 但し p : 円振動数

(13) 式を (12) 式に入れると $\frac{d^4 \mu}{dx^4} - \frac{\rho S}{EI} p^2 \mu = 0$ (14) いま $\phi^2 = \frac{\rho S}{EI} p^2$ とおくと

(14) 式は、 $\frac{d^4 \mu}{dx^4} - \phi^2 \mu = 0$ (15) (15) 式の一級解は

$$\mu = A \sin \phi x + B \cos \phi x + C \sinh \phi x + D \cosh \phi x \quad (16)$$

A, B, C, D は積分常数で次の境界条件式より求める。即ち $x=0$ で $\mu=0$ 、 $\frac{d\mu}{dx}=0$

従つて $C = -A$ 、 $D = -B$ 、この結果より $\mu = A(\sin \phi x - \sinh \phi x) + B(\cos \phi x - \cosh \phi x)$ (17)

l の長さ l とすると l の頭に $F \sin p t$ の外力が働く。 $x=l$ で $EI \frac{d^3 \mu}{dx^3} = -F \sin p t$

又、 $x=l$ で $\frac{d^2 \mu}{dx^2} = 0$ (17) 式に之等の条件を入れたと、

$$EI \phi^3 \{A(\cos \phi l + \cosh \phi l) - B(\sin \phi l - \sinh \phi l)\} = F$$

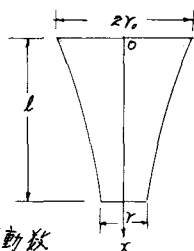
$$A(\sin \phi l + \sinh \phi l) + B(\cos \phi l + \cosh \phi l) = 0$$

この両式より A, B を求めると $A = \frac{F}{2EI \phi^3} \cdot \frac{\cos \phi l + \cosh \phi l}{1 + \cos \phi l \cosh \phi l}$ $B = \frac{-F}{2EI \phi^3} \cdot \frac{\sin \phi l + \sinh \phi l}{1 + \cos \phi l \cosh \phi l}$

A, B の値を (17) 式に入れたと、 $U = \frac{F l^3}{3EI}$ とおくと

$$\frac{\mu}{U} = \frac{3}{2} \frac{(\cos \phi l + \cosh \phi l)(\sin \phi x - \sinh \phi x) - (\sin \phi l + \sinh \phi l)(\cos \phi x - \cosh \phi x)}{(\phi l)^3 (1 + \cos \phi l \cosh \phi l)} \quad (18)$$

但し U は、 l の頭部に F の荷重を静的に加へたときの撓みである。



この(18)式をくい先端円錐部に適用するに当り、3.の項における先端角 30° の場合と、先端角 60° のときの諸元を求める。即ち、 30° の先端角の場合 $\varphi = 0.059 \text{ cm}^{-1}$ 、 60° の場合 $\varphi = 0.126 \text{ cm}^{-1}$ とする。次に、 H の値は、本文に考察しているくいの載荷試験時の降伏点荷重 460 kg を用いると、先端角 30° の場合 $U = 0.01788$ 、先端角 60° の場合 $U = 0.019$ を得る。この φ, U の値を(18)式に代入すると、先端角 30° の場合、振動振幅 μ は、次の(19)式で示され、 60° の場合の振動振幅 μ は(20)式で示される。

$$\mu_{30} = 0.0009172(\sin \varphi x - \sinh \varphi x) - 0.0009345(\cos \varphi x - \cosh \varphi x) \text{----- (19)}$$

$$\mu_{60} = 0.0002354(\sin \varphi x - \sinh \varphi x) - 0.0004475(\cos \varphi x - \cosh \varphi x) \text{----- (20)}$$

即ち(19)式、(20)式によって明らかなように、振動振幅は、先端角 30° の方が 60° の場合よりも小さい。

さて、くいの横振動による正弦波の波長を λ 、振幅を μ とすると、振動波の或る点の変位は、

$\mu \sin 2\pi \frac{x}{\lambda}$ で示される。いま、横振動によるくいの変形を y' 、地盤の圧縮変形を y とすると、

$y + y' = \mu \sin 2\pi \frac{x}{\lambda}$ が成立する。くいと地盤との間に均しく圧力を p とすると $p = ky'$ 、但し k は地盤係数である。くいを弾性地盤上の梁と考へると $EI \frac{d^4 y'}{dx^4} = pd$ 、但し d ：くい径とする。従つて、

$y' = \frac{EI}{kd} \frac{d^4 y}{dx^4}$ 故に y' を消去して、 $\frac{d^4 y}{dx^4} + 4m^4 y = 4m^4 \mu \sin 2\pi \frac{x}{\lambda}$ 、但し $4m^4 = \frac{kd}{EI}$ である。

この四次の微分方程式を解いて、 $y = e^{mx}(C_1 \sin mx + C_2 \cos mx) + e^{-mx}(C_3 \sin mx + C_4 \cos mx) + \frac{4m^4 \mu}{(\frac{2\pi}{\lambda})^4 + 4m^4} \sin 2\pi \frac{x}{\lambda}$ 茲て C_1, C_2, C_3, C_4 は積分常数である。この式の中の値は一般に小さいから x の小さい範囲では、

第2項は第1項に比して小さいから、之を無視すると $y = C_1 \sin mx + C_2 \cos mx + \frac{4m^4 \mu}{(\frac{2\pi}{\lambda})^4 + 4m^4} \sin 2\pi \frac{x}{\lambda}$ くい両端で曲げモーメント零なる条件を入れて C_1, C_2 を決定して 次の(21)式を得る。

$$y = \frac{\mu}{\frac{1}{4}(\frac{2\pi}{\lambda m})^2 + 1} \left\{ \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} - \left(\frac{2\pi}{\lambda m} \right)^2 \frac{\sin 2\pi \frac{x}{\lambda}}{\sin mx} \right\} \text{----- (21)}$$

但し λ ：くいの長さ。

(21)式で、一般に $(\frac{2\pi}{\lambda m})^2 < 1$ 、 $(\frac{2\pi}{\lambda m})^4 < 1$ であるから、(21)式は $y = \mu \sin 2\pi \frac{x}{\lambda}$ ----- (22)

即ち(22)式によって、地盤の圧縮変形 y の値が求められる。さて、周期 $T = \frac{2\pi}{p}$ 、 p ：円振動数

圧縮波の伝播速度 $V_s = 52 \sqrt{N}$ より $V_s = 50 \text{ m/sec}$ とし、 $\lambda = TV_s$ より 先端角 30° の場合 $\lambda = 1987 \text{ cm}$

先端 60° の場合 $\lambda = 443 \text{ cm}$ を得る。従つて、(22)式の μ に(19)、(20)の μ の値を代入して 先端円錐体

部分の横振動による地盤の圧縮変形を計算すると 次の表の値が得られる。

即ち、先端円錐体における、振動による地盤の

圧縮変形量は、先端角 60° の場合が若く大きい

ことが分る。地盤の圧縮変形量の大きいことは、

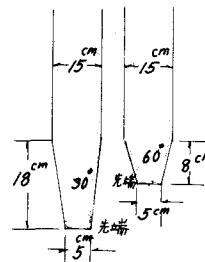
地盤の密度を粗にすることを意味する。

即ち、圧縮変形量の大小は、地盤の擾乱度の

大小を意味している。従つて、圧縮変形量の少

ない先端角 30° の方が、先端支持力が大である。

このことは、2の項の静的解析を裏付けている。



(表1) 地盤の圧縮変形 y の値(cm)

先端より距離	先端角 30°	先端角 60°
18 cm	39×10^{-7}	
16	29×10^{-7}	
14	21×10^{-7}	
12	14×10^{-7}	
10	84×10^{-8}	
8	44×10^{-8}	35×10^{-6}
6	19×10^{-8}	16×10^{-6}
4	64×10^{-9}	53×10^{-7}
2	77×10^{-10}	72×10^{-8}

参考文献

西田義親 — 砂質地盤内の基礎杭の支持力の計算法：土木学会論文集 64号

大崎順彦 — 基礎構造

A. Kozdi — *Bauingenieur* 1950

柴田道生 — 基礎くいの貫入と支持力に関する研究(Ⅲ) 名城大学工学部研究報告 No. 11, 1970