

III-79 軸力を受ける単杭の水平抵抗に関する研究

立命館大学理工学部 正員 西本 安範

1. まえがき

軸力を受ける単杭の水平抵抗に関しては、地盤を完全弾性体と仮定して導かれた理論解が紹介されているが、地盤の非弾性的な性質を考慮したものは見当らないようである。そこで著者は、軸力と水平力を受ける杭の周辺地盤が荷重の増大にともない地表面から次第に降伏状態に達するものと考え、図-1に示すごとく $p-y$ 曲線を2つの折れ線と仮定し、さらに横方向地盤反力係数を深さに関係なく一定、降伏状態に達する地盤反力係を深さ方向に $p_n = p_f x^n$ として変化させた場合の理論式を誘導し、模型杭を対象として2, 3の数値計算を試みたのでその結果を報告する。

2. 理論式の誘導

図-2に示されるごとく、地上に突出していない単杭が杭頭に軸力 N と水平力 H を受ける場合、杭の周辺地盤が軸力と水平力の増大にともない地表面から次第に降伏状態に達するものと考えれば、地盤反力の分布は図-3に示すごとく、塑性域、弾性域において $b p_f x^n$, $b k y_2$ となる。したがって、両域における杭の挙動に関する基礎方程式は、 EI : 杭の曲げ剛性, b : 杭の作用幅, p_f : 降伏地盤反力係数, n : 降伏地盤反力指数として次式で示される。

$$\text{塑性域} (x \leq x_p) : EI \frac{d^4 y_1}{dx^4} + N \frac{d^2 y_1}{dx^2} + b p_f x^n = 0 \quad (1)$$

$$\text{弾性域} (x > x_p) : EI \frac{d^4 y_2}{dx^4} + N \frac{d^2 y_2}{dx^2} + b k y_2 = 0 \quad (2)$$

式(1), (2)の一般解を求めると、それぞれに対して次式が得られる。

$$y_1 = C_1 + C_2 x_1 + C_3 \cos A x_1 + C_4 \sin A x_1 + y_0 \quad (3)$$

$$y_2 = e^{-\alpha x_2} (C_5 \cos r x_2 + C_6 \sin r x_2) + e^{\alpha x_2} (C_7 \cos r x_2 + C_8 \sin r x_2) \quad (4)$$

ここに、 $A = \sqrt{N/EI}$, $\alpha = \sqrt{\beta^2 - (N/4EI)}$, $r = \sqrt{\beta^2 + (N/4EI)}$, $\beta = \sqrt{bk/4EI}$, y_0 は特殊解で $C_1 \sim C_8$ は境界条件と接続条件によって定められる積分定数である。また、杭が無限長であるとの通常の考えによれば、 $x_2 \rightarrow \infty$ において $y_2 \rightarrow 0$ になるので積分定数 $C_7 = C_8 = 0$ となり、式(4)は結局次式(4')で示される。

$$y_2 = e^{-\alpha x_2} (C_5 \cos r x_2 + C_6 \sin r x_2) \quad (4')$$

また、塑性域と弾性域の境界 ($x_1 = x_p$, $x_2 = 0$) において

$$(y_1)_{x_1=x_p} = (y_2)_{x_2=0}, (y_1')_{x_1=x_p} = (y_2')_{x_2=0}, (y_1'')_{x_1=x_p} = (y_2'')_{x_2=0}, (y_1''')_{x_1=x_p} = (y_2''')_{x_2=0} \quad (5)$$

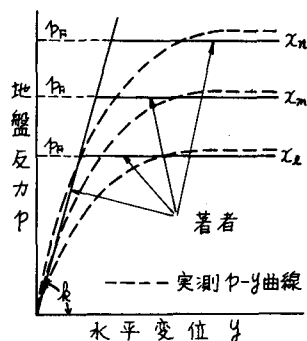


図-1 地盤反力と水平変位曲線

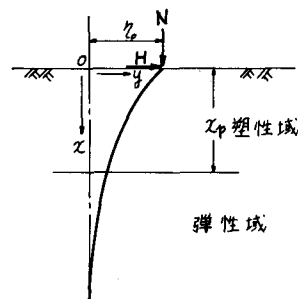


図-2 杭頭に軸力 N と水平力 H を受ける杭

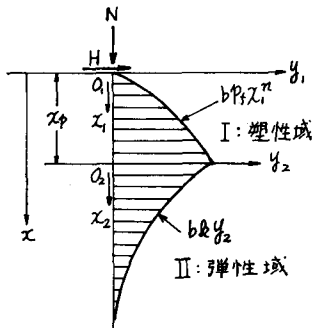


図-3 弾塑性域と地盤反力

なる連続条件が存在し、杭頭($x_1=0$)において次のような境界条件が存在する。

$$(y_1'')_{x_1=0} = 0, \quad (y_1'')_{x_1=0} + \frac{N}{EI} (y_1')_{x_1=0} = \frac{H}{EI} \quad (6)$$

式(5), (6)より積分定数 $C_1 \sim C_6$ を求めると次のような結果が得られる。

$$\begin{aligned} C_1 &= Y_0 - \frac{1}{\Delta A} \left\{ \left[2\alpha A^2 \cos \alpha x_p + \{4\beta^4 + (3\alpha^2 - r^2)A^2\} \sin \alpha x_p \right] Y_0' + \left[A(3\alpha^2 - r^2 + A^2) \cos \alpha x_p + 4\alpha\beta^2 \sin \alpha x_p \right] Y_0'' \right. \\ &\quad \left. + \left[2\alpha A \cos \alpha x_p + (2\beta^2 - A^2) \sin \alpha x_p \right] Y_0''' \right\} \\ C_2 &= \frac{1}{A^2} \left\{ \frac{H}{EI} - (y_0')_{x_1=0} \right\}, \quad C_3 = \frac{1}{A^2} \left\{ (y_0'')_{x_1=0} \right\}, \quad C_4 = \frac{2\beta^2}{\Delta A} (2\beta^2 Y_0' + 2\alpha Y_0'' + Y_0''') \\ C_5 &= -\frac{1}{\Delta} \left\{ A \left[2\alpha A \cos \alpha x_p + (3\alpha^2 - r^2) \sin \alpha x_p \right] Y_0' + (3\alpha^2 - r^2 + A^2) \cos \alpha x_p \cdot Y_0'' + (2\alpha \cos \alpha x_p - A \sin \alpha x_p) Y_0''' \right\} \\ C_6 &= -\frac{1}{\Delta r} \left\{ A \left[(\alpha^2 - r^2) A \cos \alpha x_p + \alpha(\alpha^2 - 3r^2) \sin \alpha x_p \right] Y_0' + \alpha(\alpha^2 - 3r^2 + A^2) \cos \alpha x_p Y_0'' + \left[(\alpha^2 - r^2) \cos \alpha x_p - \alpha A \sin \alpha x_p \right] Y_0''' \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

上式において

$$\begin{aligned} \Delta &= 2\beta^2 \left\{ (2\beta^2 - A^2) \cos \alpha x_p - 2\alpha A \sin \alpha x_p \right\} \\ Y_0 &= -\frac{1}{A^2} \left\{ (y_0'')_{x_1=0} \right\} \cos \alpha x_p - (y_0')_{x_1=x_p} - \frac{1}{A^2} \left\{ \frac{H}{EI} - (y_0''')_{x_1=0} \right\} x_p \\ Y_0' &= \frac{1}{A} \left\{ (y_0'')_{x_1=0} \right\} \sin \alpha x_p - (y_0')_{x_1=x_p} - \frac{1}{A^2} \left\{ \frac{H}{EI} - (y_0''')_{x_1=0} \right\} \\ Y_0'' &= \left\{ (y_0'')_{x_1=0} \right\} \cos \alpha x_p - (y_0')_{x_1=x_p}, \quad Y_0''' = -A \left\{ (y_0'')_{x_1=0} \right\} \sin \alpha x_p - (y_0''')_{x_1=x_p} \end{aligned} \quad (8)$$

また、地表面における杭の水平変位 y_0 は $y_0 = (y_1)_{x_1=0}$ より、各領域における曲げモーメント M_1, M_2 は $M_1 = -EI(y_1'')$, $M_2 = -EI(y_2'')$ よりそれぞれ次式で与えられる。

$$\begin{aligned} y_0 &= C_1 + C_3 + (y_0)_{x_1=0}, \quad M_1 = EI(C_3 A^2 \cos \alpha x_1 + C_4 A^2 \sin \alpha x_1 - y_0'') \\ M_2 &= -EI e^{-\alpha x_2} \left\{ (\alpha^2 - r^2) C_5 - 2\alpha r C_6 \right\} \cos r x_2 + \left\{ 2\alpha r C_5 + (\alpha^2 - r^2) C_6 \right\} \sin r x_2 \end{aligned} \quad (9)$$

なお、各式に含まれる x_p は塑性域の深さを表わし、 $p_1 x_p^r / k = (y_1)_{x_1=x_p}$ 、あるいは $p_1 x_p^r / k = (y_2)_{x_2=0}$ の関係より次式を満足する解として与えられる。

$$\frac{p_1}{k} x_p - C_5 = 0 \quad (10)$$

3. 計算結果とその考察

軸力の水平抵抗におよぼす影響をみるために、弾性理論解、弾、塑性理論解の両者について数値計算をおこなった。計算で対象とし

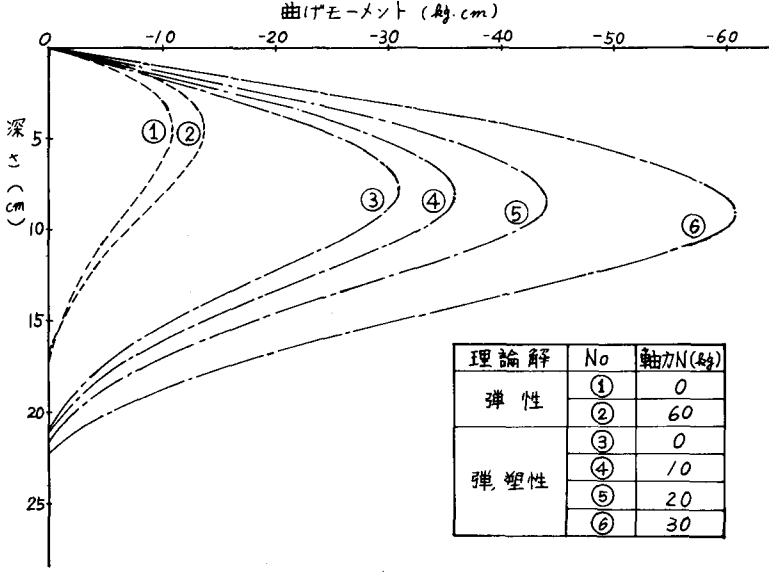


図-4. 曲げモーメントの計算結果の1例 ($H=6 \text{ kg}$)

た杭は、奥行幅が1cm、作用幅が2cm、弾性係数Eが30,000 kg/cm²のメタクリル酸樹脂製の模型杭であり、地盤定数としては、弾性理論解については、 $k=10 \text{ kg/cm}^3$ の値を、弾、塑性理論解については、 $\mu_r=0.1 \times \text{kg/cm}^2$ 、 $k=10 \text{ kg/cm}^3$ の値をそれぞれ採用し数値計算をおこなった。

図-4は曲げモーメントの計算結果の1例を、図-5は地表面における杭の水平変位の計算結果を示したものであり、表-1は最大曲げモーメント、

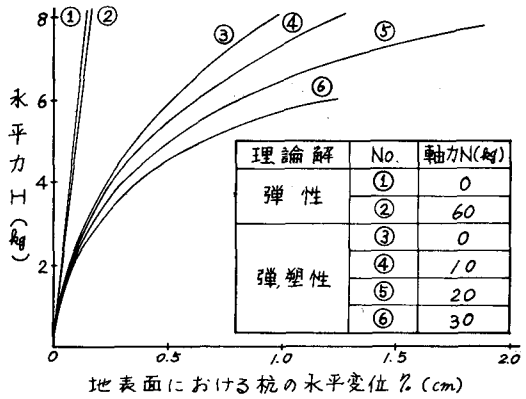


図-5. 地表面における杭の水平変位の計算結果

表-1. 弾性理論解と弾、塑性理論解の計算結果

理 論 解	軸力 N (kg)	水平力 H (kg)	最大曲げモーメント (-kg·cm)		最大曲げモーメント生ずる位置 (cm)		曲げモーメント第1零点の位置 (cm)	地表面における杭の水平変位 (cm)	
弾 性	0	2	3.63	1.00*	4.42	1.00	17.67	1.00	0.0357
		4	7.25	1.00	4.42	1.00	17.67	1.00	0.0711
		6	10.88	1.00	4.42	1.00	17.67	1.00	0.1067
		8	14.50	1.00	4.42	1.00	17.67	1.00	0.1423
	10	2	3.76	1.04	4.43	1.00	17.53	0.99	0.0362
		4	7.52	1.04	4.43	1.00	17.53	0.99	0.0723
		6	11.28	1.04	4.43	1.00	17.53	0.99	0.1085
		8	15.05	1.04	4.43	1.00	17.53	0.99	0.1446
	20	2	3.91	1.08	4.44	1.00	17.39	0.98	0.0368
		4	7.81	1.08	4.44	1.00	17.39	0.98	0.0736
		6	11.72	1.08	4.44	1.00	17.39	0.98	0.1104
		8	15.62	1.08	4.44	1.00	17.39	0.98	0.1471
	30	2	4.06	1.12	4.45	1.01	17.26	0.98	0.0375
		4	8.12	1.12	4.45	1.01	17.26	0.98	0.0749
		6	12.18	1.12	4.45	1.01	17.26	0.98	0.1124
		8	16.25	1.12	4.45	1.01	17.26	0.98	0.1499
	60	2	4.60	1.27	4.48	1.01	16.88	0.96	0.0399
		4	9.20	1.27	4.48	1.01	16.88	0.96	0.0798
		6	13.81	1.27	4.48	1.01	16.88	0.96	0.1194
		8	18.41	1.27	4.48	1.01	16.88	0.96	0.1599
弾 塑 性	0	2	6.13	1.00	5.0	1.00	18.3	1.00	0.067
		4	16.87	1.00	6.4	1.00	19.7	1.00	0.228
		6	30.98	1.00	7.7	1.00	21.1	1.00	0.521
		8	47.70	1.00	8.9	1.00	22.5	1.00	0.975
	10	2	6.59	1.08	5.1	1.02	18.0	0.98	0.070
		4	18.87	1.12	6.5	1.02	19.6	0.99	0.254
		6	36.04	1.16	8.0	1.04	21.2	1.00	0.625
		8	58.08	1.22	9.3	1.04	22.9	1.02	1.244
	20	2	7.13	1.16	5.1	1.02	18.0	0.98	0.077
		4	21.50	1.27	6.6	1.03	19.7	1.00	0.299
		6	44.03	1.42	8.4	1.09	21.6	1.02	0.806
		8	78.44	1.64	10.0	1.12	23.6	1.05	1.875
	30	2	7.81	1.27	5.2	1.04	18.0	0.98	0.084
		4	25.37	1.50	7.0	1.09	19.8	1.01	0.364
		6	60.66	1.96	9.0	1.17	22.2	1.05	1.230
		8	—	—	—	—	—	—	2.36

* N=0時の値に対する各軸力の値の比を示したものである。

最大曲げモーメントを生ずる位置、曲げモーメント第1零点の位置、地表面における杭の水平変位などの項目について同表に示されている軸力と水平力が作用した場合の計算結果を一括して示したものである。図-4、表-1よりあきらかなように、弾性理論解に $k=10 \text{ kg/cm}^2$ を代入して得られた計算結果では、最大曲げモーメントの値は軸力 N が $N=0 \sim 60 \text{ kg}$ へと増加するにつれて、 $N=0 \text{ kg}$ の値に対する比で $1.00 \sim 1.27$ へと増大するが、軸力の影響はあまり認められないようである。また、最大曲げモーメントを生ずる位置については $N=0 \sim 60 \text{ kg}$ で $1.00 \sim 1.01$ と軸力の増加にともないその位置は深くなってゆくのが認められ、曲げモーメント第1零点については逆に、軸力の増加にともない $1.00 \sim 0.96$ と浅くなってゆくのが認められるが、この荷重の範囲では軸力の影響は極めて少ないものと考えられる。これに対し、弾、塑性理論解に $\mu_0=0.1 \times \text{kg/cm}^2$ 、 $k=10 \text{ kg/cm}^2$ を代入して得られた計算結果では、同図に示した曲げモーメントの分布曲線、ならびに表-1に示した値にみられるごとく、最大曲げモーメントに関しては、 $N=10 \sim 30 \text{ kg}$ の増加にともない $H=2 \text{ kg}$ では $1.00 \sim 1.27$ 、 $H=4 \text{ kg}$ では $1.00 \sim 1.50$ 、 $H=6 \text{ kg}$ では $1.00 \sim 1.96$ と水平力の増大にともない軸力の影響がかなりみられる。最大曲げモーメントを生ずる位置についても、 $H=2 \text{ kg}$ で $1.00 \sim 1.04$ 、 $H=4 \text{ kg}$ で $1.00 \sim 1.09$ 、 $H=6 \text{ kg}$ で $1.00 \sim 1.17$ と水平力の増大にともない軸力の影響が認められる。また、曲げモーメント第1零点に関しては $H=2 \text{ kg}$ で $N=0 \sim 30 \text{ kg}$ での値が $18.3, 18.0, 18.0, 18.0 \text{ cm}$ と $N=10, 20, 30 \text{ kg}$ の値が $N=0 \text{ kg}$ の値より小さくなっており、水平力が小さい場合には弾性理論解の計算結果と似た傾向を示すようであるが、水平力の増大にともないその値は $N=0 \text{ kg}$ の値に比して小さくなってゆくのが認められる。また、地表面における杭の水平変位に関しても図-5、表-1などからあきらかなように、弾性理論解の計算結果では $N=0 \sim 60 \text{ kg}$ に対し、 $1.00 \sim 1.12$ の値であり、軸力の影響は極めて小さいものと考えられるが、弾、塑性理論解の計算結果では $H=2 \text{ kg}$ で $1.00 \sim 1.25$ 、 $H=4 \text{ kg}$ で $1.00 \sim 1.60$ 、 $H=6 \text{ kg}$ で $1.00 \sim 2.36$ と軸力の影響は水平力の増大にともない急激に増加し、 $N=30 \text{ kg}$ 、 $H=8 \text{ kg}$ では座屈する結果となっている。

以上述べたことなどから次の事が予想される。

- 1). 地盤を完全弾性体と考える弾性理論解は水平力が極めて小さい場合には適用できようが、水平力が大きく作用する場合には地盤の非弾性的な性質を考慮する必要があると思われる。
- 2). 軸力の杭の水平抵抗におよぼす影響は水平力が小さい間はかなり小さなものと考えられるが、水平力の増加にともない急激に増加するものと考えられる。
- 3). 地盤の非弾性的な性質を考慮する弾、塑性理論解は、かかる場合の地盤定数が正確に推定される際には、水平力のみが作用した場合の理論解と同様に軸力が作用する場合にも適用できるものと思われる。

今回の報告では、地上に突出していない場合の単杭の理論式の誘導と模型杭を対象とした数値計算結果の発表にとどまったが、今後はかかる理論を裏付けるために現地実物実験のデータ解析もこなう予定である。(詳細については講演時に報告する。)

- 1). 横山幸満：鋼杭の設計と施行(増補版)、山海堂、p.158~164
- 2). 勝見雅、西本安範：杭の水平抵抗に関する2,3の考察、昭和43年度土木学会関西支部年次学術講演会概要集、BB.43.5
- 3). 勝見雅、西本安範：杭の水平抵抗に関する2,3の考察、土木学会第23回年次学術講演会概要集、BB.43.10
- 4). 勝見雅、西本安範：杭の水平抵抗に関する2,3の考察、立命館大学理工学研究所紀要、第17号、BB.43.12