

III-71 弾性率が深さとともに指数的に増す有限深さ地盤の応力と変位について

東京工業大学 正員 山口柏樹

〃 〃 木村 孟

〃 〃 学生員 〇尾上篤生

概 要

地盤を異質等方性弾性体とみて変位及び応力を解析したものに、半無限地盤を対象として弾性率が指数的に変化する場合(松村, 1931), 直線的に変化する場合(Gibson, 1966), あるいは有限地盤を対象として直線的に変化する場合に非圧縮性を仮定したもの(山口他, 1970)などがある。本報告では、弾性率が指数的に変化する有限深さ地盤の解析結果を述べるものである。表面荷重としては、円形等分布荷重と帯状等分布荷重、地盤下面と岩盤の接触は、粗い場合と滑らかな場合を仮定する。

I 解 析

力の釣合方程式, フックの法則および変位と歪の関係から, 次の変位で表わされた釣合方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Delta}{\partial r} + K \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \alpha K \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) &= 0 \\ \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \alpha \Delta + K \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) - 2\alpha K \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{軸対称} \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial \Delta}{\partial r} + K \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \alpha K \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) &= 0 \\ \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \alpha \Delta - K \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) - 2\alpha K \frac{\partial u}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{平面歪} \\ \Delta = \epsilon_r + \epsilon_\theta + \epsilon_z = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} & \quad \Delta = \epsilon_x + \epsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}$$

ここに, $K = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}$, ただし $\mu = \mu_0 e^{\alpha z} = E_0 e^{\alpha z/2(1+\nu)}$, $\lambda = \lambda_0 e^{\alpha z} = \nu E_0 e^{\alpha z}/(1+\nu)(1-2\nu)$

$$u(\xi, z) = \int_0^\infty \varphi(\xi, z) \bar{u}(\xi, z) d\xi \quad (\varphi(\xi, z) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \xi z}{\xi} & \text{平面歪} \\ \frac{1}{\xi} & \text{軸対称} \end{cases})$$

$$w(\xi, z) = \int_0^\infty \psi(\xi, z) \bar{w}(\xi, z) d\xi \quad (\psi(\xi, z) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos \xi z}{\xi} & \text{平面歪} \\ \frac{1}{\xi} & \text{軸対称} \end{cases})$$

と変換して $\bar{u}$ に関する式をつくれば, 平面歪, 軸対称のいずれの場合も次の同一形式に帰する。

$$\frac{d^4 \bar{w}}{dz^4} + 2\alpha \frac{d^3 \bar{w}}{dz^3} + (\alpha^2 - 2\xi^2) \frac{d^2 \bar{w}}{dz^2} - 2\alpha \xi^2 \frac{d \bar{w}}{dz} + \{\xi^4 + (1-2\nu)\alpha^2 \xi^2\} \bar{w} = 0$$

同様に $\bar{u}$ に関する式を得て, これを解けば, ポアソン比が 0 の場合としかうざる場合とで異なる形の解に到るが, 以下にポアソン比が 0 でない場合を示すと

$$\bar{w} = \int_0^\infty \psi(\xi, z) (C_1 e^{\lambda_1 z} + C_2 e^{\lambda_2 z} + C_3 e^{\lambda_3 z} + C_4 e^{\lambda_4 z}) d\xi$$

$$\bar{u} = \int_0^\infty \varphi(\xi, z) (A_1 C_1 e^{\lambda_1 z} + A_2 C_2 e^{\lambda_2 z} + A_3 C_3 e^{\lambda_3 z} + A_4 C_4 e^{\lambda_4 z}) d\xi$$

$$\lambda_n = \frac{1}{2} \left\{ -\alpha + (-1)^{(n-1)/2} \sqrt{\alpha^2 + 4\xi^2} - (-1)^n 4\sqrt{\frac{\nu}{1-\nu}} \alpha \xi \right\}$$

$$A_n = \{(-1-K)\xi \lambda_n + \alpha K \xi\} / \{K \lambda_n^2 + \alpha K \lambda_n - \xi^2\} \quad (n=1, 2, 3, 4)$$

ただし, C_1, C_2, C_3, C_4 は境界条件から定まる定数である。

II 境界条件

地盤は深さ H の弾性体と, その下の剛体の岩盤とから成り, その接触条件から以下の 2 Case を想定する。荷重は, 半径 B の円形等分布あるいは幅 B の帯状等分布荷重で, その大きさを q とした。

Case 1 ----- 境界が粗の場合, $z = H$ で $u = w = 0$

$$z = 0 \text{ で } \bar{u}(\xi, z) = 0, \quad \bar{w} = \begin{cases} -\frac{q}{\xi} & (0 \leq \xi \leq B) \\ 0 & (B < \xi) \end{cases}$$

Case 2 ----- 境界が滑の場合, $z = H$ で $\bar{u}(\xi, z) = 0, \quad w = 0$

$$z = 0 \text{ で } \bar{u}(\xi, z) = 0, \quad \bar{w} = \begin{cases} -\frac{q}{\xi} & (0 \leq \xi \leq B) \\ 0 & (B < \xi) \end{cases}$$

III 変位解及び応力解

IIの境界条件の下で、定数 C_1, C_2, C_3, C_4 は次のように決まる。ただしポアソン比が $\frac{1}{2}$ の場合と、しからざる場合とで式の形が異なる。軸対称については、

$$\begin{aligned} I &= (G_1 e^{\lambda_1 H} - G_4 e^{\lambda_1 H}) + (G_2 e^{\lambda_2 H} - G_4 e^{\lambda_2 H}) K_2 + (G_3 e^{\lambda_3 H} - G_4 e^{\lambda_3 H}) K_3 \\ K_2 &= -(D_1 F_3 - D_3 F_1) / (D_2 F_3 - D_3 F_2) \\ K_3 &= -(D_1 F_2 - D_2 F_1) / (D_3 F_2 - D_2 F_3) \\ D_n &= (A_n - A_4) e^{2\lambda_n H} \quad (\text{Case 1}) \quad D_n = (A_n^2 - A_4^2) \quad (\text{Case 2}) \quad (n=1, 2, 3) \\ F_n &= (\xi - \lambda_n A_4) e^{2\lambda_n H} - (\xi - \lambda_n A_n) e^{2\lambda_n H} \quad (n=1, 2, 3) \end{aligned}$$

とおくことにより (i) $\nu = \frac{1}{2}$ の場合 $S = \left\{ \frac{(1+\nu)}{E_0} \right\} \frac{B J_1(\xi B)}{I}$, $G_n = \xi \lambda_n - \frac{\alpha}{2} \xi + (-1)^n \frac{\alpha}{2} \lambda_n$ ($n=1, 2, 3, 4$)

(ii) $\nu \neq \frac{1}{2}$ の場合 $S = \left\{ \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E_0} \right\} \frac{B J_1(\xi B)}{I}$, $G_n = \nu \xi + (1-\nu) A_n \lambda_n$ ($n=1, 2, 3, 4$)

として $(C_1, C_2, C_3, C_4) = S(-e^{\lambda_1 H}, -K_2 e^{\lambda_2 H}, -K_3 e^{\lambda_3 H}, e^{\lambda_1 H} + K_2 e^{\lambda_2 H} + K_3 e^{\lambda_3 H})$

平面歪に対しては、 S において $B J_1(\xi B)$ を $\sqrt{\xi} \sin(\xi B)$ とすればよい。

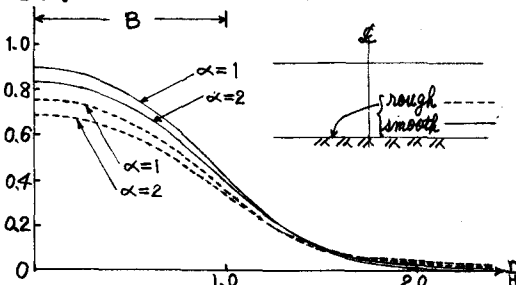
これから、とくに軸対称問題の $\nu = \frac{1}{2}$ の場合の変位及び応力の解を示せば以下のようになるが、平面歪に対する解になおすのは前述のとうりである。

$$\begin{aligned} \frac{E_0}{(1+\nu)} u(r, z) &= B \int_0^\infty \xi \left\{ \frac{J_1(\xi B)}{I} [e^{\lambda_1 z} (\lambda_1 e^{\lambda_1 z} + \lambda_2 K_2 e^{\lambda_2 z} + \lambda_3 K_3 e^{\lambda_3 z}) - \lambda_4 e^{\lambda_4 z} (e^{\lambda_1 H} + K_2 e^{\lambda_2 H} + K_3 e^{\lambda_3 H})] \right\} J_0(\xi r) d\xi \\ \frac{E_0}{(1+\nu)} w(r, z) &= B \int_0^\infty \xi \left\{ \frac{J_1(\xi B)}{I} [e^{\lambda_1 z} (e^{\lambda_1 z} + K_2 e^{\lambda_2 z} + K_3 e^{\lambda_3 z}) - e^{\lambda_4 z} (e^{\lambda_1 H} + K_2 e^{\lambda_2 H} + K_3 e^{\lambda_3 H})] \right\} J_0(\xi r) d\xi \\ \frac{\sigma_z}{B e^{\alpha z}} &= - \int_0^\infty \left\{ \frac{J_1(\xi B)}{I} [G_1 e^{(\lambda_1 H + \lambda_1 z)} + G_2 e^{(\lambda_2 H + \lambda_2 z)} + G_3 e^{(\lambda_3 H + \lambda_3 z)} - e^{\lambda_4 z} (e^{\lambda_1 H} + K_2 e^{\lambda_2 H} + K_3 e^{\lambda_3 H})] \right\} J_0(\xi r) d\xi \end{aligned}$$

IV 数値計算と結論

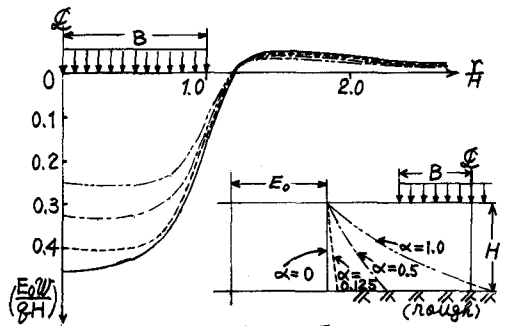
上の u, w, σ_z の式中の変数を、層厚 H で無次元化した後に、弾性率 $E = E_0 e^{\alpha z}$ において α を変え、応力及び変位を計算した結果は右図のようである。図は円形載荷に対するもので、 $\alpha = 0$ は等質地盤にあたる。

計算の結果、地盤内の弾性率の平均が等しければ表面沈下に与える α の影響は小さいことかわかる。(図3)。応力分布は、接触面の粗滑の影響の方が α の差異より大きいから予想される。なお、ポアソン比の影響については現在計算中であるので講演時に補足したい。

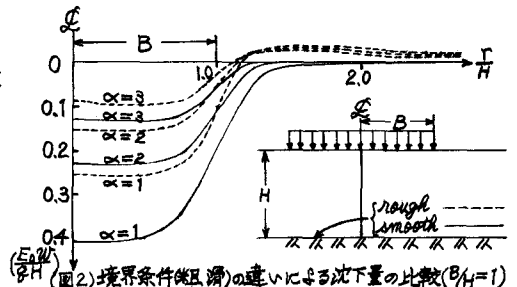


(図4) 岩盤上の鉛直応力分布 ($B/H=1$)

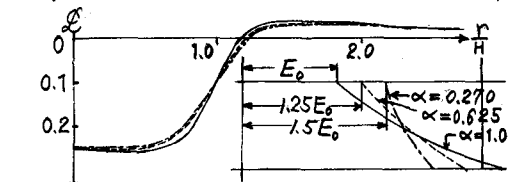
参考文献 松村彌治：弾性率の深さとともに変化する地盤における基礎の沈下(193)土木学会誌 57/7 岩山口祐樹他：弾性率の深さとともに直線的に変化する有限深さ地盤内の応力及び変位について(1970)土木学会25回講演集



(図1) α の違いによる表面沈下量の比較 ($B/H=1$)



(図2) 境界条件(粗滑)の違いによる沈下量の比較 ($B/H=1$)



(図3) α の違いによる表面沈下量の比較 ($B/H=1$) (E の鉛直方向平均一定)