

III-49 砂中の音速の理論計算と測定

東京工大精研 正員 奥島基良

" " 本岡誠一

横河電機

跡部淳史

砂を均一球からなる粒状体と考えて、砂中の縦波速度・横波速度の理論計算を行なった。縦波速度の実測値と一致するように、粒子1個の接触点の数を定めてみると、一応もっともらしい数となった。また、間隙が水で満たされた場合の伝搬速度を計算し実測値と比較したところ、かなりよく一致した。さらに、乾燥状態でのポアソン比が、間隙率・土圧などには無関係に一定であることを理論的に指摘し、つぎに、間隙が水で満たされた場合のポアソン比を計算した。これらの計算結果は、音波による地層探査や、音速測定による土質の調査などに役立つものと考えらる。

1. 理論計算に用いた仮定

- (1) 粒子はすべて直径の等しい球であり、寸法は粒状体中の音波の波長に比べて十分小さい。
- (2) 隣の球との接触点の数は、いずれの球についても等しい。
- (3) 接触点に加わる静圧力は、いずれの接触点についても等しい。
- (4) 応力による変形は、接触点のごく近傍でのみ生ずる。
- (5) すべての球は、交番応力の方向（縦波については音波の進行方向、横波については進行方向に垂直な方向）にのみ併進運動し、回転運動は行なわれない。
- (6) 2個の球の中心間の相対変位の交番応力方向の成分は、中心間間隔の音波の進行方向の成分に比例する。

2. 記号と計算に使用した数値

a : 球の半径 ρ : 球の密度 ($=2.78/\text{cm}^3$) E : 球のヤング率 ($=7.3 \times 10^{10} \text{ dynes/cm}^2$) G : 球の剛性率 ($=3.1 \times 10^{10} \text{ dynes/cm}^2$) K : 球の体積弾性率 ($=3.67 \times 10^{10} \text{ dynes/cm}^2$) σ : 球のポアソン比 ($=0.17$)	ρ_w : 水の密度 ($=18/\text{cm}^3$) K_w : 水の体積弾性率 ($2.2 \times 10^{10} \text{ dynes/cm}^2$) c_w : 水中の音速 ($=1483 \text{ m/s}$, 約20°Cにおける音速) ϕ : 粒状体の充填率(体積率), $\phi = 1 - \phi$: 粒状体の間隙率 m : 粒状体中の単位断面積の中に存在する球の数 ($= \phi / \frac{4}{3} \pi a^3$) n : 球1個についての接触点の数(接触する隣の球の数)
ρ_s : 乾いた粒状体の密度 ($= \phi \rho$) $\bar{D}$: " 縦波弾性率 $\bar{G}$: " 剛性率 $\bar{\sigma}$: " ポアソン比	$\bar{\rho}_w$: 水で飽和した粒状体の密度 ($= \phi \rho + (1 - \phi) \rho_w$) $\bar{D}_w$: " 縦波弾性率 $\bar{G}_w$: " 剛性率 $\bar{\sigma}_w$: " ポアソン比
$\bar{c}_p$: 粒状体中の縦波速度 ($= \sqrt{\bar{D}/\bar{\rho}}$) $\bar{c}_{pw}$: " (水で飽和) ($= \sqrt{\bar{D}_w/\bar{\rho}_w}$) $\bar{c}_s$: 粒状体中の横波速度 ($= \sqrt{\bar{G}/\bar{\rho}}$) $\bar{c}_{sw}$: " (水で飽和) ($= \sqrt{\bar{G}_w/\bar{\rho}_w}$)	u_{ap} : 球の中心間間隔のx軸方向(音波の進行方向)成分が a であるような2個の球の中心の、 P_2 によって生ずるx軸方向の相対変位。 u_{as} : 同上の、 P_2 によって生ずるy軸方向(交番せん断応力の方向)の相対変位(横波の場合) u_p : $\bar{c}_p$ によって生ずる、接触点の球の中心に対する相対変位。 u_s : $\bar{c}_s$ によって生ずる、接触点の球の中心に対する接線方向相対変位。
S_p : 接触点の縦方向スチフネス ($= \bar{c}_p / u_p = 3 \left\{ \frac{2}{9} \left(\frac{E}{1 - \sigma^2} \right)^2 \phi a \right\}^{\frac{1}{3}} = a \left\{ \frac{24 \pi}{n \phi} E \left(\frac{E}{1 - \sigma^2} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{3}}$: Hertzの接触理論による。 S_s : 接触点の横方向スチフネス ($= \bar{c}_s / u_s = \alpha S_p$, 相似則から考え、 α は球の弾性定数で決まる定数, $\sigma = 0.2$ のとき $1/26$)	

3. 縦波について(乾燥時)

3-1 接触点の応力 X軸から θ の角度の接触点には、 f_p の圧縮応力と f_s のせん断応力が加わる。ゆえに、 $f_p = S_p u_p$, $f_s = S_s u_s$ 。また、接触点は球の中心に対してX軸方向にのみ相対変位をしており(仮定(5))、その大きさは $u_{ap} \cos \theta$ である(仮定(6))。したがって、 $u_p = u_{ap} \cos \theta \cdot \cos \theta = u_{ap} \cos^2 \theta$, $u_s = u_{ap} \cos \theta \sin \theta$ 。ゆえに、 $f_p = S_p u_p = u_{ap} S_p \cos^2 \theta$, $f_s = S_s u_s = u_{ap} S_s \cos \theta \sin \theta$ 。したがって、接触点の応力 f のX方向成分 f_x は、

$$f_x = f_p \cos \theta + f_s \sin \theta = u_{ap} \cos \theta (S_p \cos^2 \theta + S_s \sin^2 \theta) \dots\dots\dots (3.1)$$

3-2 粒状体中の縦方向交番圧力 P_p P_p は、Fig.2で、Xの面(単位面積)で切られる球のXの面より下の部分にある接触点にはたらく応力のX方向成分 f_x の総和に等しい。また、Xの面で切られる位置を、球の中心から $\xi = a \cos \theta_0$ だけX方向に離れた位置とすると、その位置の確率密度は ξ の値にかかわらず一定である。すなわち、 ξ が ξ と $(\xi + d\xi)$ の間にある球の数は、 $m \frac{d\xi}{2a} = \frac{\phi}{4/3 \pi a^3} d\xi$

また、接触点の球面上の位置に関する確率密度は、球面上のどの位置でも等しいから、球面上の単位面積当りの接触点の数は $n/4\pi a^2$ である。したがって、 P_p は

$$\begin{aligned} P_p &= \sum (-f_x) \\ &= - \int_{-a}^a \left\{ \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{n}{4\pi a^2} f_x 2\pi a \sin \theta \cdot a \cdot d\theta \right\} \frac{\phi}{4/3 \pi a^3} d\xi \\ &= - \frac{n\phi}{8/3 \pi a^3} \int_{-a}^a \left\{ \int_{\theta_0}^{\pi} f_x \sin \theta \cdot d\theta \right\} d\xi \\ &= \frac{3n\phi u_{ap}}{20\pi a^2} (S_p + \frac{2}{3} S_s) = \frac{3n\phi S_p}{20\pi a^2} (1 + \frac{2}{3} \alpha) u_{ap} \dots\dots\dots (3.2) \end{aligned}$$

3-3 粒状体中の縦波弾性率 $\bar{D}$ 、縦波速度 $\bar{c}_p$

$$\begin{aligned} P_p &= u_{ap} \bar{D}/a \text{ であるから,} \\ \bar{D} &= \frac{3n\phi}{20\pi} (1 + \frac{2}{3} \alpha) \frac{S_p}{a} = \frac{9}{10} (1 + \frac{2}{3} \alpha) \left(\frac{n\phi}{3\pi} \frac{E}{1-\sigma^2} \right)^{\frac{2}{3}} P^{\frac{1}{3}} \\ \bar{c}_p &= \sqrt{\frac{\bar{D}}{\rho}} = \left\{ \frac{9}{10} (1 + \frac{2}{3} \alpha) \right\}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{3\pi} \frac{E}{1-\sigma^2} \right)^{\frac{1}{2}} \rho^{-\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{3}} \phi^{\frac{1}{3}} P^{\frac{1}{6}} \dots\dots\dots (3.3) \\ \alpha &= 1/26 \text{ (4-3 参照), } n = 147.3 \phi^{\frac{13}{2}} \text{ (3.6) 式参照) とすれば,} \end{aligned}$$

$$\bar{c}_p = 2.4025^{\frac{1}{2}} \left(\frac{E}{1-\sigma^2} \right)^{\frac{1}{2}} \phi^{\frac{1}{2}} P^{\frac{1}{6}} \dots\dots\dots (3.4)$$

石英砂として数値を代入し、また P を $[\text{kg/cm}^2]$ で表わせば、 $\bar{c}_p [\text{cm/s}] = 1.325 \times 10^5 \phi^{\frac{1}{2}} P^{\frac{1}{6}} [\text{kg/cm}^2] \dots\dots\dots (3.5)$
(3.5)式による計算結果をFig.5に示す。

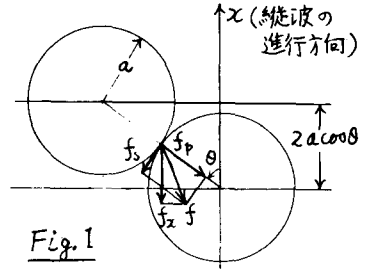


Fig.1

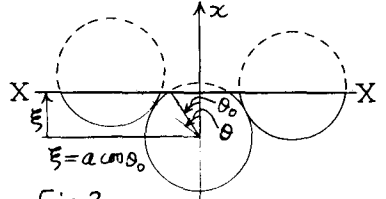


Fig.2

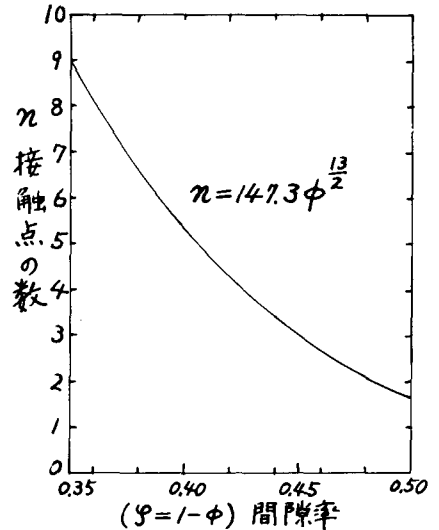


Fig.3 接触点数と間隙率との関係

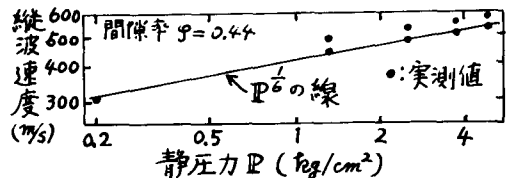


Fig.4 静圧 P を変えたときの縦波速度の測定値

Fig.4は、 $\bar{c}_p$ が静圧 P の $1/6$ 乗に比例する2とを筆者らが実験により確かめた結果¹⁾で、文献2), 3)の傾向とも一致している。

3-4 接触点数 n Fig.5 中の測定値は筆者らが中央粒径 0.185mm (0.12mm から 0.3mm までの粒径の砂が全体の体積の 90% を占める) の標準砂について、静圧力 $P=1.3\text{ kg/cm}^2$ の場合に測定した値である。破線は、 $\bar{c}_p=1.384 \times 10^5 \phi^2$ とした実験式で、測定された音速が充填率中の2乗にほぼ比例していることを示す。(文献2)中の測定値も、ほぼ $\bar{c}_p \propto \phi^2$ となっている。) ところで、この実験式と(3.3)式が正しいものとして、接触点数 n を求めると、

$$n = 147.3 \phi^{\frac{13}{2}} \quad \text{----- (3.6)}$$

となる。これを Fig.3 に示す。

なお、筆者らの経験によると、粒径が比較的良好に揃った砂では、充填率 ϕ は、もっともゆるくつめた場合約 51% 、できるだけ締めこんだ場合約 59% の程度である。また、接触点は3点あれば粒子は固定されるし、さらにそれらの接触点の中には、静圧力が極めてわずかしき加わっていないものもあると思われる。とゆえ、Fig.3 のように $\phi=1-\varphi=0.516$ のとき $n=2$ 、 $\phi=0.594$ のとき $n=5$ という数は、有効な接触点の数としては、もっともらしい数と考えられる。

4. 横波について(乾燥時)

4-1 接触点の応力 縦波の場合と同じように考える。

接触点の位置は、 x 軸から θ の角度の点で、接触点と x 軸とを含む平面と y 軸との間の角は δ であるとする。接触点には、径方向に f_p の圧縮応力と、 x 軸に垂直な面内で接線方向に f_{s1} のせん断応力と、 x 軸を含む平面内で接線方向に f_{s2} のせん断応力が加わっている。したがって、

$$f_p = u_{as} S_p \cos \theta \sin \theta \cos \delta$$

$$f_{s1} = u_{as} S_s \cos \theta \sin \delta, \quad f_{s2} = u_{as} S_s \cos^2 \theta \cos \delta$$

ゆえに、接触点の応力 f の y 軸方向成分 f_y は、

$$f_y = u_{as} \cos \theta (S_p \sin^2 \theta \cos^2 \delta + S_s \sin^2 \delta + S_s \cos^2 \theta \cos^2 \delta) \quad \text{----- (4.1)}$$

4-2 粒状体中の単位面積当りの交差せん断応力 P_s 縦波の場合と同様に考えれば、

$$P_s = \Sigma(-f_y) = \int_{-a}^a \left[\int_0^\pi \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{n}{4\pi a^2} f_y d\delta \right\} a^2 \sin \theta d\theta \right] \frac{\phi}{\frac{4}{3}\pi a^3} d\xi = \frac{n\phi S_p}{20\pi a^2} (1+4\alpha) u_{as} \quad \text{----- (4.2)}$$

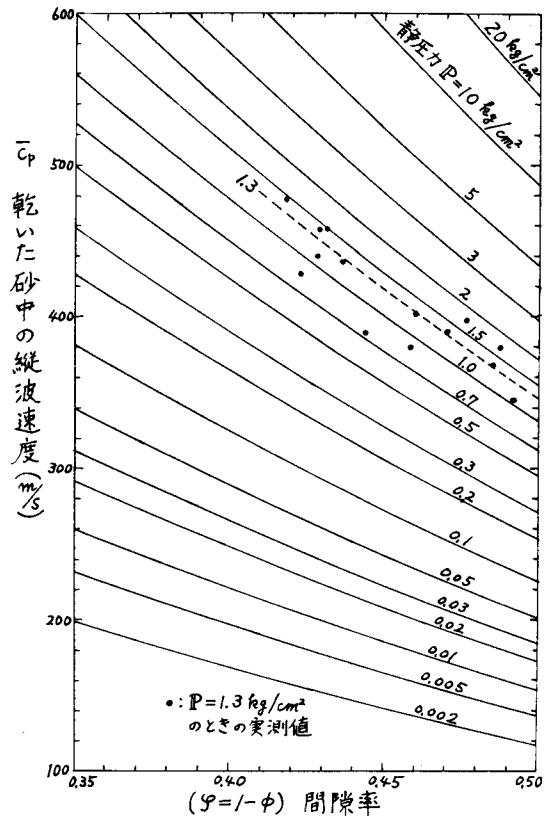


Fig.5 縦波速度の計算値と測定値

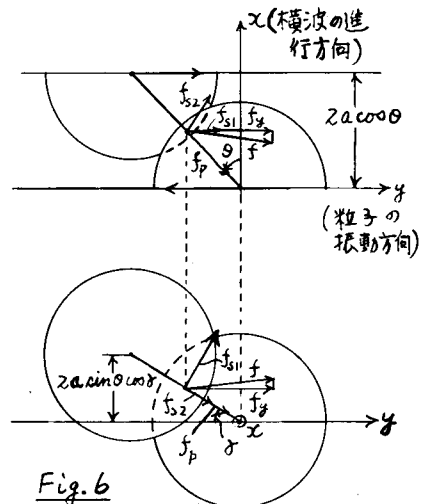


Fig.6

4-3 剛性率 $\bar{G}$, ポアソン比 $\bar{\sigma}$, 横波速度 $\bar{C}_s$

$P_s = u_{as} \bar{G}/a$ であるから,
 $\bar{G} = \frac{n\phi}{20\pi} \frac{(1+4\alpha) S_p}{a} = \frac{1+4\alpha}{3+2\alpha} \bar{D} = \frac{1-2\bar{\sigma}}{2(1-\bar{\sigma})} \bar{D}$
 ゆえに, $\bar{\sigma} = \frac{1-6\alpha}{4(1-\alpha)}$ すなわち, $\bar{\sigma}$ は $\alpha = S_p/S_p$ の
 みで決まり, n, ϕ, P には関係しないことがわ
 かる。(文献2)でもほぼそのような測定結果)

文献3)では $\bar{\sigma} = 0.2$ としているので, この値
 を採用すれば, $\alpha = 1/26$ となる。そこで,

$$\bar{C}_s = \sqrt{\frac{\bar{G}}{\bar{\rho}}} = \bar{C}_p \sqrt{\frac{\bar{G}}{\bar{D}}} = \left(\frac{1+4\alpha}{3+2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \bar{C}_p = \bar{C}_p \sqrt{\frac{3}{8}} \dots (4.3)$$

5. 空隙が水で満たされた砂中の音速

5-1 縦波速度 $\bar{C}_{pw}$ 文献4)における筆者の理
 論式において, $\sigma = 0$ とすると,

$$\begin{aligned} \bar{C}_{pw} &= \sqrt{\frac{\bar{D}_w}{\bar{\rho}_w}} = \sqrt{\frac{1}{\bar{\rho}_w} \frac{\bar{D} \{ (1-\phi)(3K/K_w - 3) + 2 \} + 3K}{(1-\phi)(3K/K_w - 3) + 3}} \\ &= C_w \sqrt{\frac{1 + (\bar{C}_p/C_w)^2 \phi P \{ 1 - \phi + (3\phi - 1)K_w/3K \}}{(1-\phi + \phi P/\rho_w)(1-\phi + \phi K_w/K)} \dots (5.1)} \end{aligned}$$

粒子が石英砂として数値を代入し, $\bar{C}_p$ として
 (3.5)式を用いれば,

$$\bar{C}_{pw} = C_w \sqrt{\frac{1 + 2.111(1-0.9592\phi)\phi^5(P(\text{kg/cm}^2))^{\frac{1}{3}}}{(1+1.7\phi)(1-0.94\phi)}} \dots (5.2)$$

Fig. 7 に計算結果を示す。図中, ●印は $P = 1.3 \text{ kg/cm}^2$, ×印は $P = 0$ のときの測定値である。
 いずれも, 約数 % 測定値の方が大きい。

5-2 横波速度 $\bar{C}_{sw}$, ポアソン比 $\bar{\sigma}_w$

$\bar{G}_w = \bar{G}$ と考えられるから,

$$\bar{C}_{sw} = \sqrt{\frac{\bar{G}_w}{\bar{\rho}_w}} = \sqrt{\frac{\bar{G}}{\bar{\rho}_w}} = \bar{C}_s \left(1 + \frac{1-\phi}{\phi} \frac{\rho_w}{P}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\bar{C}_s}{\sqrt{1 + \frac{1-\phi}{\phi} \frac{\rho_w}{P}}} \dots (5.3)$$

$\bar{C}_{pw} > \bar{C}_p$ であるに反し, $\bar{C}_{sw} < \bar{C}_s$ となる。

$$\bar{\sigma}_w = \frac{1}{2} \frac{(\bar{C}_{pw}/\bar{C}_{sw})^2 - 2}{(\bar{C}_{pw}/\bar{C}_{sw})^2 - 1} \dots (5.4)$$

(5.4) 式による計算結果を Fig. 8 に示す。

文献1) 奥島・本岡・跡部: 日本音響学会講演論文集 p197(1971-5)

2) K. Iida: Bull. Earthquake Research Inst., Tokyo Univ. 17, p59 (1939)

3) H. Brandt: J. Appl. Mech. 22, p479 (1955)

4) 奥島: 日本音響学会講演論文集 p307 (1970-10)

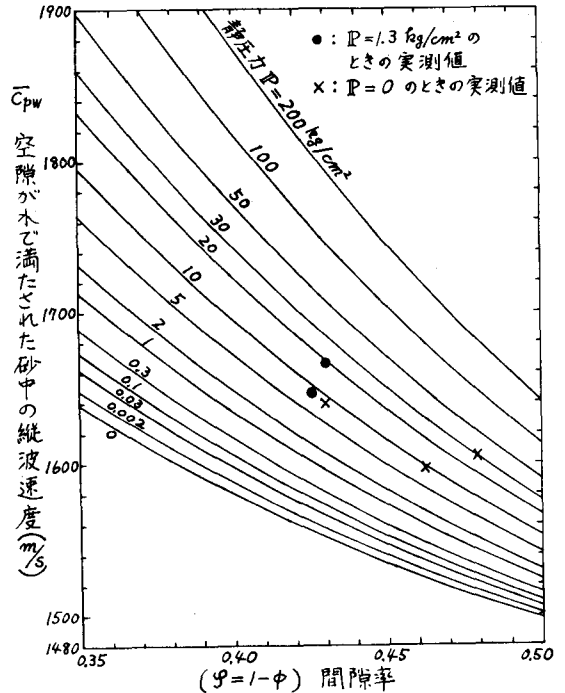


Fig. 7 縦波速度の計算値と測定値

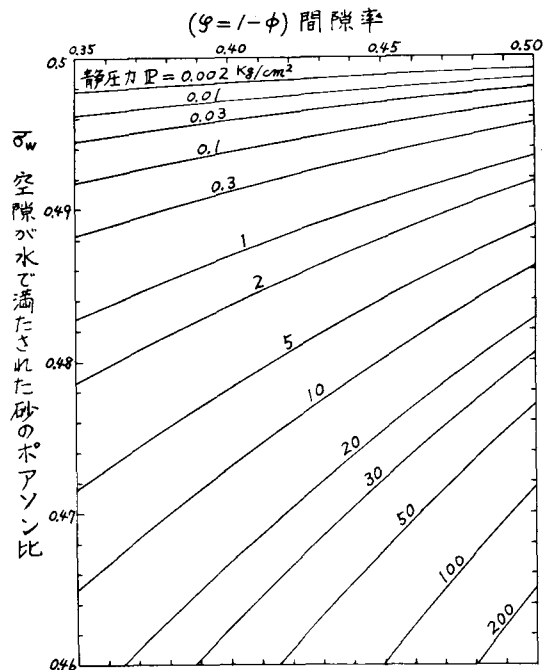


Fig. 8 ポアソン比の計算値