

III-46 線形粘弾性論による粘性土の減衰特性に関する考察

京都大学工学部 正 員 ○赤 井 浩 一

京都大学大学院 学生員 岡 野 真 久

1 まえがき

一般に物質が振動の場におかれるとき、入力エネルギーのいくらかは種々の機構で消散するが、これは内部摩擦という言葉で総称される。土の内部摩擦の機構を調べることにより、土の変形特性を明らかにするという立場から、縦振動する粘性土の減衰特性を10~40 cps で調べ線形粘弾性論による説明を試みた。今回は含水比(40%)、圧密荷重(0.5 kg/cm²)をほぼ一定にして、振動数による影響を中心に考察した。

2 減衰の表示

振動時のエネルギー消散を定義する最も直接的な方法は変形のサイクルを通じて試料内の実際のエネルギー消散を測定することである。図-1に示すように、ひずみが最大のとき供試体内にたくわえられる最大全弾性エネルギー W ($\triangle OAB$ の面積) に対する変形の1サイクル当りの消散エネルギー ΔW (応力-ひずみ曲線のヒステリシスループで閉じられた面積) の比 Ψ を「比減衰エネルギー」という。一方「対数減衰率 δ_T 」は引き続いて起こる自由振動 u_n, u_{n+1} の比の自然対数であり、また応答ひずみと応力間に現われる「位相差 δ 」は正弦的な強制振動に対して認められるものであって、これらはいずれも振動減衰の一つの間接的な尺度である。これらの量には次の近似関係がある。

$$\Psi = \Delta W / W \doteq d \log_e W = \log_e (u_n / u_{n+1})^2 = 2\delta_T$$

強制振動の場合、角速度を ω として応力とひずみをそれぞれ $\sigma = \sigma_0 \sin \omega t$, $\epsilon = \epsilon_0 \sin(\omega t - \delta)$ とすれば

$$W \doteq \frac{1}{2} \sigma_0 \epsilon_0, \quad \Delta W = \oint \sigma d\epsilon = \sigma_0 \epsilon_0 \pi \sin \delta \doteq \sigma_0 \epsilon_0 \pi \tan \delta$$

であるから $\Psi \doteq 2\pi \tan \delta$ となる。ここで複素弾性率を $E^* = E_1 + iE_2$ とすれば $\tan \delta = E_2/E_1$ である。以上より次の近似関係が成立する。 $\tan \delta \doteq \delta_T / \pi$ (1)

次に線形粘弾性体の一次元波動伝播を考えると、複素速度 $C^* = (E^*/\rho)^{1/2}$ で伝わる波の波動関数は

$$U(\alpha, t) = U_0 \exp[i\omega(t - \alpha/C^*)] \quad \text{ただし } \omega \text{ は角速度, } \rho \text{ は密度} \quad (2)$$

$$\text{で表わされる。ここで } 1/C^* = \operatorname{Re}(1/C^*), \alpha = \omega \operatorname{Im}(1/C^*) \quad \text{ただし } 1/C^* = \operatorname{Re}(1/C^*) - i\operatorname{Im}(1/C^*) \quad (3)$$

とおくと(2)式は $U(\alpha, t) = U_0 \exp[i\omega(t - \alpha/C^*)] \cdot \exp(-\alpha) \cdot \exp(-\alpha)$ となる。したがって(3)式により

$$C^* = \left(\frac{E_1^2 + E_2^2}{\rho E_1} \right)^{1/2} = \left(\frac{\sqrt{E_1^2 + E_2^2}}{\rho} \right)^{1/2} \cdot \frac{1}{\cos(\delta/2)} \quad (4)$$

$$\alpha = \omega \left(\frac{\rho E_2}{E_1^2 + E_2^2} \right)^{1/2} = \omega \left(\frac{\rho}{\sqrt{E_1^2 + E_2^2}} \right)^{1/2} \sin \frac{\delta}{2} = \frac{\omega}{C^*} \tan \frac{\delta}{2} \doteq \frac{\omega \tan \delta}{2C^*} \doteq \frac{\omega}{2C^*} \frac{\delta_T}{\pi} \quad (5)$$

となる。一般に波速 C^* , 減衰係数 α , 位相の遅れ $\tan \delta$ は周波数に關係し、(4), (5)式によりこれらのうち2つが周波数の関数として与えられれば、その線形粘弾性体としての特性が決まる。

Voigt モデル; $\tan \delta = \omega \tau_* = 2\pi f \tau_*$ ここに $\tau_* = C/k$

Maxwell モデル; $\tan \delta = 1/\omega \tau_* = 1/2\pi f \tau_*$ ここに $\tau_* = C/k'$

S-V モデル; $\tan \delta = \omega \tau_* / \{ (1+k_*) + k_* \tau_*^2 \omega^2 \} = 2\pi f \tau_* / \{ (1+k_*) + 4\pi^2 k_* \tau_*^2 f^2 \}$ ここに $\left\{ \begin{array}{l} k_* = \frac{k}{k'} \\ \tau_* = \frac{C}{k} \end{array} \right\}$ (9)

近似には無理があるが $\delta_T/\pi \doteq \tan \delta$ が成立すると仮定して、(9)式により 30 cps で $\tan \delta = 0.3$ となるように k_* と τ_* をそれぞれ決めた。S-V モデルについては強制振動の ψ も考慮すると $\tau_* = 0.02 \sim 0.03$ (sec), $k_* = 0.5 \sim 1.0$ になると考えられる。これらの $\tan \delta$ と ψ の関係を図-4 に記入した。

4. 瞬時载荷実験の解析例

上のようにして得たパラメータを用いて S-V モデルにより、図-3 のように得られる実験記録の説明を試みた。振動系を図-6 のようにモデル化する。振動方程式は次のようになる。

$$\ddot{u} + \frac{k'+k}{C} \dot{u} + \frac{k'}{Cm} u = \frac{k'+k}{Cm} F(t) + \frac{\dot{F}(t)}{m} \quad (10)$$

(10)式を $F(t) = F_0 H(t)$ ($H(t)$ はハセサイドのステップ関数), $u(0) = 0, \dot{u}(0) = 0, \ddot{u}(0) = 0$ の条件で解くと

$$\left. \begin{aligned} U(T) &= \frac{F_0}{m\omega_0^2} \left\{ 1 + A_1 e^{\alpha_0 T} + e^{\beta_0 T} (B_1 \cos \gamma_0 T + C_1 \sin \gamma_0 T) \right\} \\ P(T) &= F_0 \left\{ 1 + A_2 e^{\alpha_0 T} + e^{\beta_0 T} (B_2 \cos \gamma_0 T + C_2 \sin \gamma_0 T) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

を得る。ここに $\alpha_0 \omega_0, (\beta_0 \pm i\gamma_0) \omega_0$ は三次代数方程式 $S^3 + \left\{ \left(\frac{1}{k_*} + 1 \right) \omega_0 / \zeta \right\} S^2 + \left\{ \left(\frac{1}{k_*} + 1 \right) \omega_0^2 S + \left(\frac{1}{k_*} + 1 \right) \omega_0^3 / \zeta \right\} = 0$ の三根であり、 $k_* = k/k', \omega_0 = \sqrt{k'k/(k'+k)m}, \tau_* = C/k, T = \omega_0 t, \zeta = \omega_0 \tau_*$ である。 $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ はいずれも $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ で表わされる定数である。 $k_* = 1$ の場合の $U(T), P(T)$ をパラメーターにして図-7 に示した。

次に立ち上がり時間を有するステップ状 载荷に対する系の応答を(11)式を用いて次式により計算した。

$$U_r(T) = \int_0^T [U(T-T')] \cdot \frac{dF}{F_0 dT'} dT', \quad P_r(T) = \int_0^T [P(T-T')] \cdot \frac{dF}{F_0 dT'} dT'$$

$$\text{無次元化量 } \bar{U}(T) = \frac{U_r(T)}{F_0/m\omega_0}, \quad \bar{P}(T) = \frac{P_r(T)}{F_0} \text{ を用いて}$$

測定データと比較した一例を図-8 に示す。この例では $t = 150$ msec における変位の測定値は 0.7 mm, モデルによる計算値 $U(\infty) = 0.8$ mm であった。

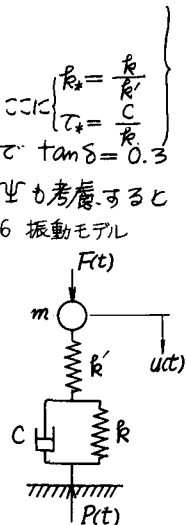


図-7 ステップ 载荷に対する振動系の応答

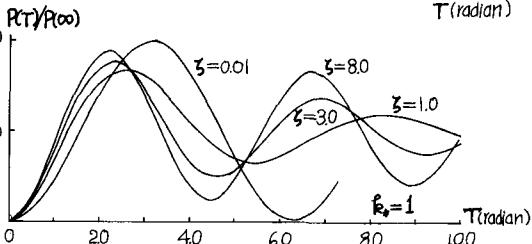
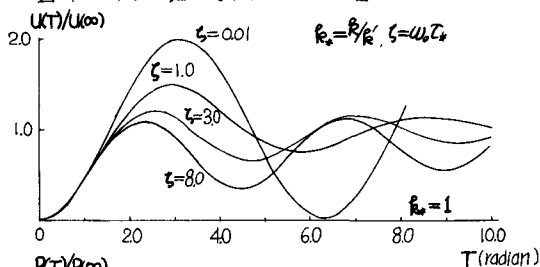
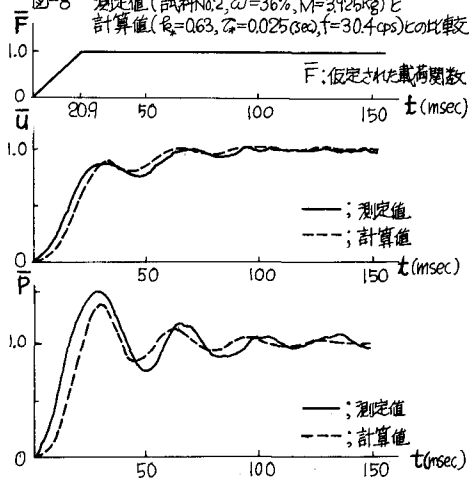


図-8 測定値 (試料 No. 2, $\omega = 36\%$, $M = 3925$ kg) と計算値 ($k_* = 0.63, \zeta = 0.025$ (sec), $f = 30.4$ cps) との比較



3 自由振動実験の概要と結果の考察

表-1 に示すような物理的性質をもつ粘土供試体(直径35mm,高さ80mm)を図-2 に示す実験装置で, Q点で糸を切断することにより一軸瞬時載荷を行ない, 供試体上端部の変位と加速度, 下端部での圧力を測定した。実測記録の一例を図-3 に示す。上載荷重 M_0 を変えることにより振動数は変化する。加速度記録の自由振動とみなせる部分の対数減衰率 δ_T と周期 T を求め, δ_T/π を振動数 f について整理した(図-4)。また同じ試料について側圧 $\sigma_3=1\text{kg/cm}^2$ のもとでの同様な自由振動実験と振動三軸試験機による強制振動実験から得られた δ_T/π と f の関係も参考として示しておいた。¹⁾ 調べた振動数範囲は広いものではないが粘土の δ_T/π の振動数依存性はそれほど大きくないと言えよう。

各固有周期で自由振動する粘土試料と重錘との系をそれぞれ Voigt のモデル(ばね定数 k , 粘性定数 C)と質量 m の一自由度振動系にモデル化すると質量 m の変位 U は次式で表わされる。

$$U = U_0 e^{-\frac{C}{2m}t} \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{C^2}{4m^2}} \cdot t - \theta\right)$$

対数減衰率の定義により次の関係を得る。

$$\delta_T = \log_e \frac{\ddot{U}_n}{\ddot{U}_{n+1}} = \frac{C}{2m} \cdot T = \frac{2\pi C}{\sqrt{4km - C^2}} \quad (6)$$

$$\text{よって } C = 2m\delta_T/T, \quad k = m(\delta_T^2 + 4\pi^2)/T^2 \quad (7)$$

ここに m は Rayleigh による振動系質量を用いた。このようにして求めた k と C の振動数との関係を図-5 に示した。また振動系の粘性減衰の量は粘性定数 C とその周期性をもつ限界の値 C_{crit} との比 h (減衰定数)でも表わされるが, h と対数減衰率 δ_T とは次の関係がある。

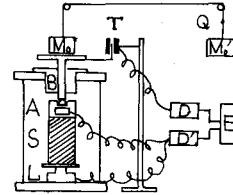
$$h = \frac{C}{C_{crit}} = \frac{C}{2m\omega} = \frac{C}{2\sqrt{mk}} = \frac{\delta_T}{2\pi} \quad (8)$$

次に Voigt のモデル(ばね定数 k , 粘性定数 C), Maxwell のモデル(ばね定数 k' , 粘性定数 C), ばねと Voigt の直列三要素モデル(k', k, C) (以後 S-V モデルと称す。図-6 参照)について $\tan\delta$ を振動数 f と k', k, C で表わすと次式を得る。

表-1 粘土試料の物理的性質

試料番号	No.1	No.2	No.3
比重	2.67	2.73	2.60
粘土分	39%	23%	12.5%
シルト分	44%	57%	71%
砂分	17%	20%	16.5%
含水比	40~45%	36~40%	38~43%
液性限界	52.8%	48.9%	51.5%
塑性指数	27.2%	24.4%	31.8%

図-2 実験装置



M₀: 重錘
M₁: 対重
S: 粘土供試体
B: ボールベッシュ
A: 加速度計
T: 変位計
D, E: 増幅器
E: 電磁オンロ
L: ロードセル

図-3 測定記録の一例

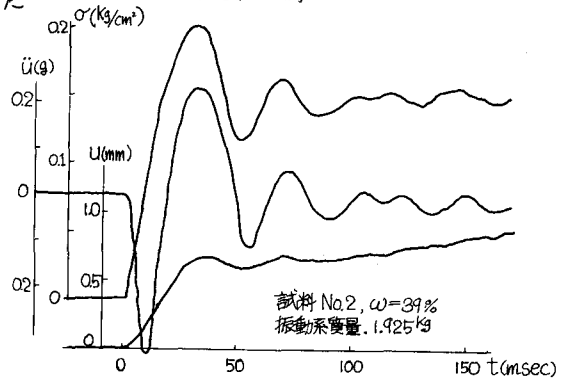


図-4

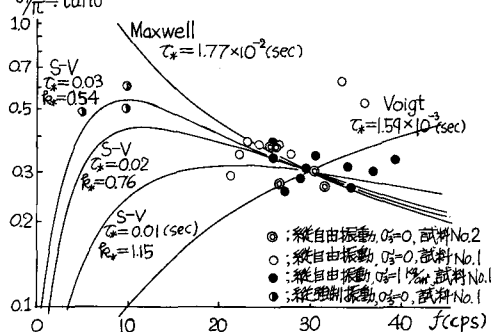
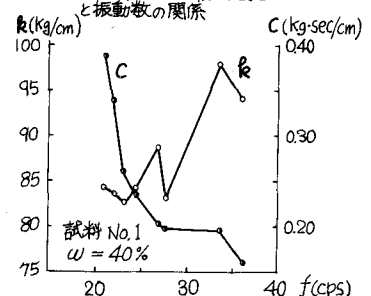


図-5 ばね定数および粘性定数と振動数の関係



5 土柱の一次元応力波伝播問題への適用

各振動数においてそれぞれ Voigt モデルを仮定して自由振動実験より得たばね定数 k と粘性定数 C を $E = (\ell/A)k$, $\eta = (\ell/A)C$ によって供試体(断面 A , 長さ ℓ)の平均的弾性係数 E と粘性係数 η に置き換える。このようにして得た E と η を用いると複素弾性率は $E^* = E_1 + iE_2 = E + i\omega\eta$ と表わされる。この関係から動的弾性率 E_1 を求め、また式(4), (5)により縦波の位相速度 C_* , 減衰係数 α を推算し図-9に示した。ただし周波数0の動的弾性率 E_0 はひずみ速度 $1\%/min$ の軸圧縮試験より求めた応力-ひずみ曲線の初期接線勾配にほぼ等しいとしてプロットした。これより粘土を線形粘弾性体とみれば、20~40 cps で波速はほとんど変化なく、減衰係数は周波数に対してほぼ直線的に増加するこが推定される。

また S-V モデルについては図-10に示した記号

$$E^* = \frac{\{(1+k_*) + k_*\tau_*^2\omega^2\}E}{(1+k_*)^2 + k_*^2\tau_*^2\omega^2} + i \frac{\tau_*\omega E}{(1+k_*)^2 + k_*^2\tau_*^2\omega^2} \quad (12)$$

となる。自由振動実験から得たパラメータ、例えば $k_* = 0.54$, $\tau_* = 0.03(\text{sec})$ を用いて式(12)より、式(4)(5)を計算すると E_1/E_0 , G/C_* (G は周波数0の波速), α の周波数 f との関係が図-9の実線のように得られる。ただし α については $f = 20\text{cps}$ で $C_* = 50\text{m/sec}$ を仮定して計算した。このようにして S-V モデルにより得た減衰係数

α を 10cps と 20cps について図-11に記入し、別の試料(Na.3)での実験結果と比較した。なおこの実験は粘土供試体(直径6cm, 長さ60cm)を鉛直に立て、振動三軸装置の起振機により4種の周波数の正弦波をその頭部に与え、埋設した圧力計により圧力振幅の減衰を測定したものである。

6 まとめ

粘性土の減衰特性を表わす α , δ_r , ρ などの量は、この実験の範囲では振動数にそれほど大きく依存しない。このような特性を三要素線形粘弾性モデル(S-Vモデル)により表わすことができる。基礎の耐震設計など特定振動数帯を問題にする時には土のこのようなモデル化が有効であらう。この実験の振動数範囲で、ほぼ同じパラメータ値の S-V モデルにより、振動減衰にともなう粘性土の挙動と、応力波の減衰特性を統一的に説明できた。

参考文献 1) 赤井, 山内; 衝撃的荷重に対する飽和粘土の応答特性, 土木学論文集 第149号, 1968

2) K. Akai, M. Tokuda, T. Kiuchi; Experimental Study on the Propagation of Stress Wave in Cohesive Soils, Proc. JSCE, No. 161, 1969.

図-9 E_1, C, α と周波数の関係

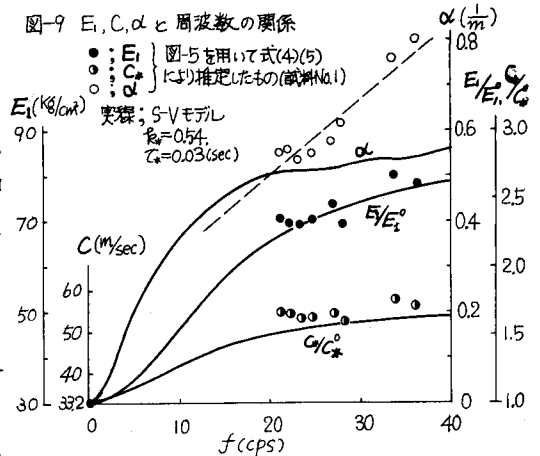


図-10

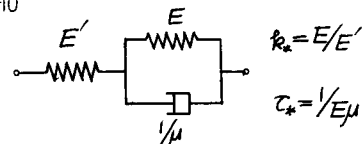


図-11 応力振幅の減衰
無次元化応力振幅

