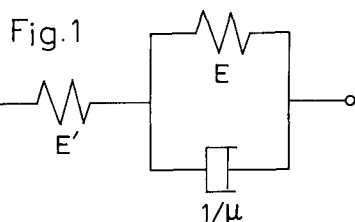


京都大学工学部 正員 赤井 浩一
京都大学大学院 学生員 〇堀 正幸

1. まえがき 一般に土はエネルギー減衰特性を持っていることが知られており、一次元応力波伝播時においても、この特性を明確に観察することができる。応力波伝播過程における応力の減衰や波形のくずれを土の持つエネルギー減衰特性の1つの指標と考へて、線形粘弾性モデルを仮定することによりその現象をある程度説明し得ることを前報で報告した。特に三要素線形粘弾性モデル(2-spring, 1-dashpot)を仮定すれば、上記の現象と同時に有限の波速をも説明でき、この種の問題を理論的に取り扱う場合、土のモデルとして適していることが推測された。前報では重ね合わせ法を使って、その数値結果を報告したが今回はラプラス変換手法により、一次元応力波伝播による応力分布の厳密解を得て数値計算と実験値との比較考察を試みる。

2. 理論解の誘導 Fig.1 に示す spring-Voigt モデルからなる断面面積一定の半無限ロッドを考へ、Fig.2 のようにその一端から入射応力を与えられるものとする。また、応力波は完全に一次元的に伝播するものとする。その場合の運動方程式は次式で与えられる。



$$\rho u_{tt} = -\sigma_x \quad (1)$$

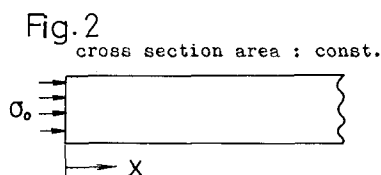
ここに、 ρ は密度、 u は変位であり、添字 t, x はそれぞれ時間と位置に関する偏微分を表す。変位とひずみの関係は次式とす。

$$\varepsilon = -u_x \quad (2)$$

spring-Voigt モデルの構成方程式は次式で与えられる。

$$E\varepsilon + 1/\mu \cdot \varepsilon_t = \sigma'(1+k) + \sigma_t/E\mu \quad (3)$$

ここに、 $k = E/E'$ である。便利のために式(3)の無次元化変数を用いれば、式(1), (2), (3)より式(5)の基礎微分方程式を得る。



$$\xi = (\rho E)^{1/2} \mu x, \quad \tau = E \mu t, \quad \Sigma' = \sigma'(x, t)/\sigma_0 \quad (4)$$

ここに、 σ_0 は表面で与えられる最大圧力である。

$$\Sigma'_{\xi\xi} + \Sigma'_{\xi\xi\tau} = (1+k) \Sigma'_{\tau\tau} + k \Sigma'_{\tau\tau\tau} \quad (5)$$

ロッドの一端において瞬間的に正に上がり、指数的に減衰するいわゆるスパイク型の波形を持つ応力を境界条件として与えれば、それは次式のように表現することができる。

$$\Sigma'(0, \tau) = \exp(-\beta\tau), \quad \Sigma'(\infty, \tau) = 0 \quad (6)$$

ラプラス変換式は

$$\mathcal{L}\{\Sigma'(\xi, \tau)\} = \int_0^\infty e^{-s\tau} \Sigma'(\xi, \tau) d\tau \quad (7)$$

式(5), (6)を式(7)によりラプラス変換し、得られる常微分方程式を境界条件のもとで解けば変換場での解は次式で与えられる。

$$\mathcal{L}\{\Sigma'(z, \tau)\} = \frac{1}{s+\beta} \exp\left\{-\frac{s\sqrt{ks+k+1}}{\sqrt{s+1}}z\right\} \quad (8)$$

式(8)の逆変換の解は次式となる。

$$\Sigma'(z, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{1}{s+\beta} e^{s\tau} \exp\left\{-\frac{s\sqrt{ks+k+1}}{\sqrt{s+1}}z\right\} ds \quad (9)$$

上式の積分は $s = -\beta$ と simple pole を持ち、 $s = -1$, $-(k+1)/k$ と branch point を持つ。また、この積分を評価するために Fig. 3 に示されるコンターに沿って積分を行おう。ここで次式の積分を定義する。

$$I = \int \frac{1}{s+\beta} e^{s\tau} \exp\left\{-\frac{s\sqrt{ks+k+1}}{\sqrt{s+1}}z\right\} ds \quad (10)$$

a. $\beta > (k+1)/k$ の場合 simple pole $s = -\beta$ はコンターの外側にあり、故に Cauchy の定理により

$$\oint = I_{AB} + I_{BC} + I_{CD} + I_{DA} = 0 \quad (11)$$

一方、 $\tau - \sqrt{k}z > 0$ のとき Jordan の補助定理により弧 BC, DA の半径が無限大に近づくにつれて、それら沿う積分はゼロとなる。すなわち $(I_{BC} + I_{DA}) = 0$ 。したがって、式(11)より

$$I_{AB} = -I_{CD} \quad (12)$$

(i) simple pole を囲む積分: I_{β}

$$I_{\beta} = -2\pi i e^{-\beta\tau} \exp\left\{\frac{\beta\sqrt{k\beta-k-1}}{\sqrt{\beta-1}}z\right\} \quad (13)$$

(ii) C_1 と C_4 沿う積分: $(I_{C_1} + I_{C_4})$ は次式の関数を定義すれば

$$\{g(s)\}^2 = \frac{s^2(ks+k+1)}{s+1} \quad (14)$$

Fig. 4 より分かる通りコンター C_1 と C_4 沿って $\{g(s)\}^2$ は一価関数となり、故に

$$I_{C_1} + I_{C_4} = 0 \quad (15)$$

(iii) 円 Γ_1 沿う積分: I_{Γ_1}

$$I_{\Gamma_1} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(-\frac{k+1}{k}\tau\right) \exp\left\{\frac{k+1}{k} \frac{\sqrt{k\omega e^{i\theta}}}{\sqrt{1-\frac{k+1}{k}}}\right\} \frac{\omega i e^{i\theta}}{\beta - \frac{k+1}{k}} d\theta = 0 \quad (16)$$

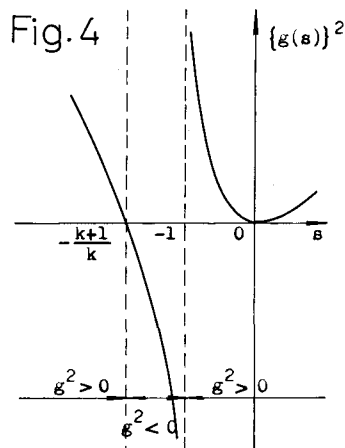
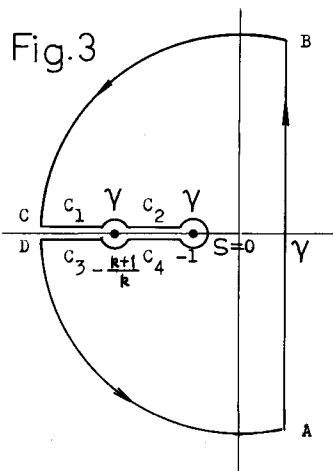
(iv) 円 Γ_2 沿う積分: I_{Γ_2}

$$I_{\Gamma_2} = \lim_{\omega \rightarrow 0} [1 + \theta(\omega)] \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\tau} \exp\left\{\frac{1}{\sqrt{\omega e^{i\theta}}}\right\} \frac{\omega i e^{i\theta}}{\beta-1} d\theta = \frac{2\pi i}{\beta-1} z^2 e^{-\tau} \quad (17)$$

(v) C_2 と C_3 沿う積分: $I_{C_2} + I_{C_3}$

$$I_{C_2} + I_{C_3} = 2 \int_0^{\frac{k}{\beta}} \frac{1}{g+1-\beta} e^{-(g+1)\tau} \sin\left\{\frac{(g+1)\sqrt{1-kg}}{\sqrt{g}}z\right\} dg \quad (18)$$

最終的に、式(1), (12), (13), (15), (16), (17), (18) より次の解を得る。



$$\Sigma'(\xi, \tau) = e^{-\beta\tau} \exp\left\{\frac{\beta\sqrt{\beta-1}}{\sqrt{\beta-1}}\xi\right\} - \frac{1}{\beta-1}\xi^2 e^{-\tau} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{1}{\xi}} \frac{1}{\xi+1-\beta} e^{-(\xi+1)\tau} \sin\left\{\frac{(\xi+1)\sqrt{1-k\xi}}{\sqrt{\xi}}\xi\right\} d\xi \quad (19)$$

b. $(k+1)/k \geq \beta \geq 1$ の場合 a. の場合と同様の解法により次の解を得る。

$$\Sigma'(\xi, \tau) = e^{-\beta\tau} \cos\left\{\frac{\beta\sqrt{k+1-k\beta}}{\sqrt{\beta-1}}\xi\right\} - \frac{1}{\beta-1}\xi^2 e^{-\tau} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{1}{\xi}} \frac{1}{\xi+1-\beta} e^{-(\xi+1)\tau} \sin\left\{\frac{(\xi+1)\sqrt{1-k\xi}}{\sqrt{\xi}}\xi\right\} d\xi \quad (20)$$

c. $\beta=1$ の場合

$$\Sigma'(\xi, \tau) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{1}{\xi}} \frac{1}{\xi} e^{-(\xi+1)\tau} \sin\left\{\frac{(\xi+1)\sqrt{1-k\xi}}{\sqrt{\xi}}\xi\right\} d\xi \quad (21)$$

d. $0 \leq \beta < 1$ の場合

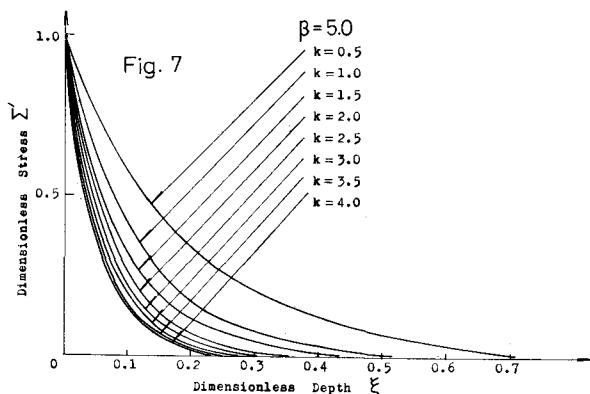
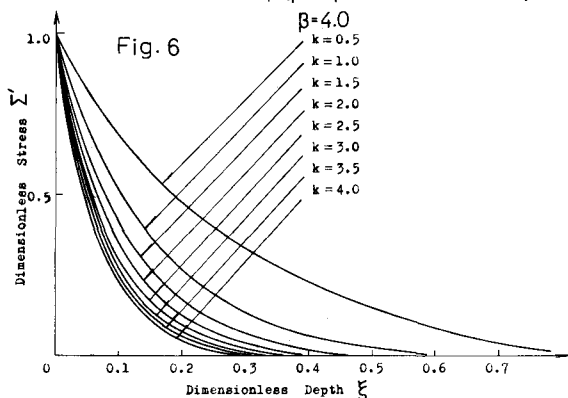
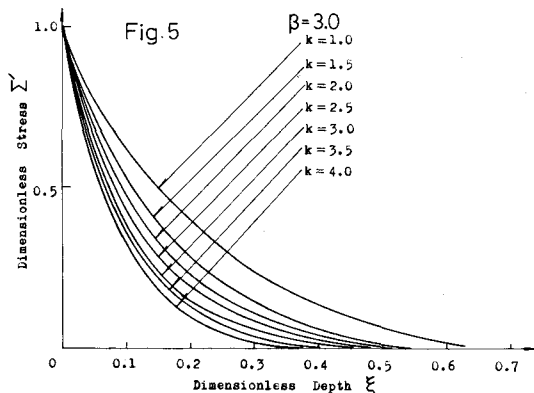
$$\Sigma'(\xi, \tau) = 1 - \frac{1}{\beta-1}\xi^2 e^{-\tau} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{1}{\xi}} \frac{1}{\xi+1-\beta} e^{-(\xi+1)\tau} \sin\left\{\frac{(\xi+1)\sqrt{1-k\xi}}{\sqrt{\xi}}\xi\right\} d\xi \quad (22)$$

なお、 $\tau - \sqrt{k}\xi < 0$ の場合は特異点を含み、式(19)の積分は常にゼロとなる。すなわち、この領域は波動がまだ到達していない領域を意味する。したがって、 $\tau - \sqrt{k}\xi = 0$ は、波のフロントを表現するものであり、これより以下に示すような変数変換によってこのモデルからなるロッド内を伝わる波動の波速を誘導することができる。

$$\tau = \sqrt{k}\xi \quad \text{i.e. } E\mu t = \sqrt{E/\rho}(\rho E)^{\frac{1}{2}}\mu x$$

$$\therefore x/t = \sqrt{E'/\rho} \quad (23)$$

3. 計算結果 粘弾性定数のヤング率の比の値を0.5~4.0にとり、表面圧力の波形を表現するパラメーター β を3.0, 4.0, 5.0として上記の解を用いて数値計算を行なった。これらの値は Shock Tube を用いた応力波伝播実験より推測されたものである。計算結果は断面距離に対する



応力の減衰に注目して Fig. 5, 6, 7 に示されるように横軸に無次元化距離、縦軸に無次元化応力をとって整理されている。なお、すべての計算結果を通じて各深さにおける波形の立ち上がり時間の変化はなく、このことは実験結果においても波形のくずれは比較的少なかったこととよく対応している。これらの図から β が大きくなるにつれて、また同じ β の値でもパラメータ k が大きくなるにつれて無次元化距離と共に減衰が大きくなることが知れる。すなわち、 k が大きくなるということは、spring-Voigt モデルの free spring に対して Voigt モデル内の spring のヤング率が大きくなることを意味しており、Voigt 的挙動が優勢になってくると考えることによって上記の計算結果を理解することができる。

4. 実験結果との比較考察 モデルの粘弾性定数を決定することは一般に難しく土の物性には勿論のこと実験条件によっても変化することが知られている。ここでは、述べたように波動は spring-Voigt モデルからなる媒質中を $\sqrt{E'/\rho}$ の波速で伝播するということから実験で得られた応力波の波速を用いて E' を決定し、残りの二つの定数 E と μ については“あてはめ法”による。実験はみかけ密度 1.7, 1.8, 1.9 g/cm³ の砂質ロームについて行われ、得られた応力波の波速はそれぞれ、186, 234, 294 m/sec (平均) である。それより、 E' としてそれぞれ 6.0×10^2 , 1.0×10^3 , 1.5×10^3 kg/cm² の値が用いられた。表面圧力の波形を $\exp(-140t)$ (t : sec) として上記の値を使って実験値と計算結果を応力の減衰に注目して整理したのが Fig. 8, 9, 10 である。これらの図より、計算結果は実験値の応力減衰性をよく説明していることが分かる。特にパラメータ k として 0.5 ~ 1.0 を用いれば土中の一次元応力波伝播時に生じる土の減衰特性を表現することができる。粘弾性定数 E と μ については応力減衰に関する限り、個々の値ではなくそれらの積に依存していることもつけ加えて理解されよう。

1) 赤井 猛, 伊藤 雅上 “Shock-Tube を用いた土中の波動伝播実験”(別項)

