

III-16 土の応力比～ひずみ増分比関係について

京都大学防災研究所 正員・松岡 元
京都大学工学部 学生員 磯田 真一

我々土質力学の研究を志向する者は、土とはどのような特性を有する材料か、その挙動はどのような法則にしたがうか、さらにその法則をもとめて土材料の構成方程式 (Constitutive eq.) を規定すべく努力を続けている。Rowe (1962)¹⁾ は砂を粒子の集合体とみて、いわゆる応力～ダイレタンシー理論を立て、Barden, Khayat, Wightman (1969)²⁾ によって受け継がれている。また Roscoe, Schofield, Thunairajah (1963)³⁾ はエネルギー論の立場から塑性論の概念を若干導入して応力～ひずみ関係を導いており、彼らの成果は Critical State Soil Mechanics (Schofield and Wroth; 1968)⁴⁾ にまとめられている。我々 (村山・松岡; 1970⁵⁾, 松岡・吉田・磯田⁶⁾; 1971, 村山・松岡; 1971⁷⁾) も、土を粒子のランダムな集合体とみなして微視的要素と巨視的力学特性を経びつけ、応力～ひずみ関係を規定しようと試みている。ここに興味あるのは、これらのそれぞれ異なる基礎に立つアプローチの中で共通な基本式が見い出されることである。すなわち、その表示法には多少の差違があるけれども、ヒトかく応力比 (stress ratio) とひずみ増分比 (strain-increment ratio) の関係が基本式となっているのである。しかも、これらの基本式を我々の主張する $(45^\circ + \frac{\phi}{2})$ 面上の応力比 (τ/σ_n) とひずみ増分比 ($d\epsilon_n/d\delta$) の関係で書き直おすとほとんど同一の式に整理されることがわかった。この二つを逆に考えると、この応力比とひずみ増分比の関係というものが土のせん断現象を支配する本質的な関係式ではなからうかと期待されるのである。

1. 微視的観点から誘導した応力比～ひずみ増分比関係

図-1, 図-2 に示すようなせん断抵抗 (τ/σ_n) とダイレタンシーの発生機構についての考察からはじめ、せん断にともなう粒子接点角 θ の度数分布の変化状況および粒子間力子の伝達状況を粒状土の二次元モデルであるアルミ丸棒および光弾性材料の丸棒の積層体について詳細に調べた結果、図-3 のような θ の度数分布形について τ/σ_n は次のように算定される。^{5), 7)}

$$\text{台形分布: } \frac{\tau}{\sigma_n} = \frac{(\frac{\pi}{2} - \theta_p) \sin(\theta_p + \delta) + (\theta_p + \frac{\pi}{2}) \sin(\theta_p + \delta) - (\theta_p + \theta_g) \cos \delta}{(\frac{\pi}{2} - \theta_p) \cos(\theta_p + \delta) + (\theta_p + \frac{\pi}{2}) \cos(\theta_p + \delta) + (\theta_p + \theta_g) \sin \delta} \quad \text{----- (1)}$$

$$\text{三角形分布 } (\theta_p = \theta_g): \frac{\tau}{\sigma_n} = \frac{\pi \sin(\theta_p + \delta) - 2\theta_p \cos \delta}{\pi \cos(\theta_p + \delta) + 2\theta_p \sin \delta} \quad \text{----- (2)}$$

ここでせん断にともなう θ の度数分布が近似的に三角形の頂点 θ_p が動くような形で変化するものとすれば、(2) 式より τ/σ_n は θ の平均値 $\bar{\theta}$ に対してほぼ直線関係となることがわかる (図-4 参照)。また $\bar{\theta}$ は図-2 についての考察から近似的にひずみ増分比 ($d\epsilon_n/d\delta$) に等しくなるので、図-4 の式を得る。^{5), 7)}

$$\frac{\tau}{\sigma_n} = (1.4 \sim 1.5) \frac{d\epsilon_n}{d\delta} + \tan \delta \quad \text{----- (3)}$$

ここで興味あるのは、原式の (2) 式ほどでは τ/σ_n は θ_p や δ が入り混った形になっているにもかかわらず、(3) 式では τ/σ_n が右辺才1項の粒子構造

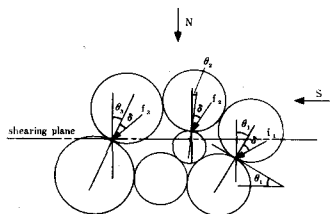


図-1 粒子間力子、粒子接点角 θ 、粒子間摩擦角 δ

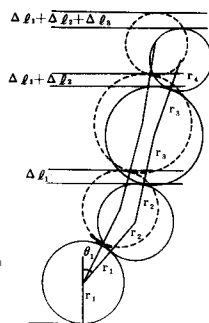


図-2 ダイレタンシーの発生機構

にもとづく抵抗(ダイラテンシーによる抵抗とも解釈できる)の部分と
 第2項の粒子間摩擦にもとづく抵抗の部分にたまたま分離できる形
 になっていることである。(3)式を三軸試験データに適用する場合
 には整理する応力面が問題になるが、(3)式を誘導した基本的な
 概念からすれば、将来その面で土粒子が活発に滑動するであろう潜在
 すべり面で整理するのが適当であると考えられる。そこで、 $(\tau/\sigma_N)_{max}$
 面すなわち $(45^\circ + \frac{\phi}{2})$ 面 (ニに $\phi_{mo} = \tan^{-1} \tau/\sigma_N$) で整理し
 てみたが良好な結果が得られている。このことは供試体
 全体としてのせん断抵抗を支配する面あるいは領域が
 存在することを暗示していると思われる。

2. Rowe の応力～ダイラテンシー理論

Rowe の応力～ダイラテンシー関係は、周知のように等大球
 の規則配置の場合について得られた関係式にエネルギー比
 最小の原理 (the minimum-energy ratio criterion) を用
 いて不規則な粒子配置の場合に拡張したものであって次
 式で与えられる。
$$\frac{\sigma_1'}{\sigma_3' (1 + dV/d\epsilon_1)} = \tan^2 (45^\circ + \frac{\phi}{2}) \dots (4)$$

 その後、Rowe (1963)⁹⁾ は (4) 式の ϕ_μ の代りに ϕ_f を代入した
 次式を考えた。
$$\frac{\sigma_1'}{\sigma_3' (1 + dV/d\epsilon_1)} = \tan^2 (45^\circ + \frac{\phi_f}{2}) \dots (5)$$

 この ϕ_f は (5) 式が実測値に合う (フィット) ように決定
 する ϕ_μ と ϕ_{cv} (C.V.R. 状態での ϕ) の間の量であるといっ
 ている。(5) 式は等大球の規則配置の場合の変形機構
 をもとにして立てられていること、エネルギー最小の原理
 ではなくてエネルギー比最小の原理というものが正当な

ものであるかどうかということ、 ϕ_f の物理的意味が不明確なこと等の点から多くの批判をう
 けているが、上式に対する実測値のプロットは興味深い。(5) 式は明らかに 1 つの応力比～
 ひずみ増分比関係の形をとっているので、(5) 式中の ϕ_f をパラメーターとして $(45^\circ + \frac{\phi}{2})$ 面上の
 τ/σ_N と $d\epsilon_N/d\delta$ の関係で書きかえてみたのが図-5 である。この図より (5) 式は (3) 式と
 ほぼ同一の勾配 (1.2～1.3) をもつ直線関係となり、(3) 式と (5) 式の間には密接な対応関係がある
 ことがわかる。図-5 において縦軸切片を $\tan \delta$ として δ すなわち ϕ_μ を計算すると、図中に示すよ
 うにその直線の ϕ_f より少し小さい値になるものが多い。ニに Rowe が (5) 式に ϕ_μ より少し
 大きい物理的意味のあいまいな ϕ_f なる量を導入しなけければならなかった原因があるのではないかと
 推測される。

3. Roscoe 一派のエネルギー論の中の応力比～ひずみ増分比関係

Granular-gravel と呼ばれる仮空の粒状土に対してエネルギー論の立場から次のような理論展開
 を行っている。三軸供試体にはさかた単位体積当りの全仕事量 δE は、

$$\delta E = \sigma_1' \delta \epsilon_1 + 2\sigma_3' \delta \epsilon_3 = (\sigma_1' - \sigma_3') \frac{2}{3} (\delta \epsilon_1 - \delta \epsilon_3) + \frac{1}{3} (\sigma_1' + 2\sigma_3') (\delta \epsilon_1 + 2\delta \epsilon_3) = \frac{2}{3} \delta \epsilon + p(\delta V) \dots (6)$$

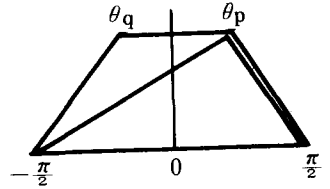


図-3 θ の度数分布形の近似

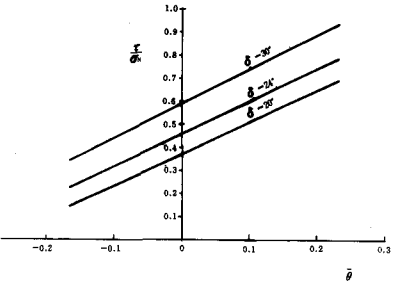


図-4 $\tau/\sigma_N \sim \theta$ 関係

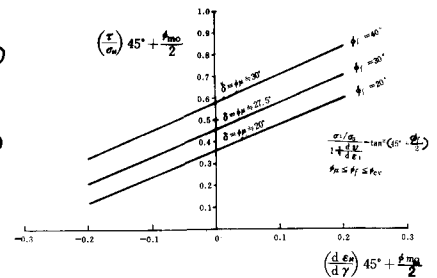


図-5 $\tau/\sigma_N \sim d\epsilon_N/d\delta$ で表わす

Rowe の応力～ダイラテンシー理論

とあらわされる。二に、 $q = \sigma'_1 - \sigma'_3$, $p = \frac{1}{3}(\sigma'_1 + 2\sigma'_3)$, $\delta E = \frac{2}{3}(\delta E_1 - \delta E_3)$, $(-\delta U) = \delta E_1 + 2\delta E_3$ (膨張が正) である。一方、全仕事量 δE は回復可能なエネルギー δU と供試体内で消費されるエネルギー δW の和であらわされる ($\delta E = \delta U + \delta W$)。Granata-gravel は理想的な剛塑性体モデルと考えられているので $\delta U = 0$ となる。そして次式を仮定する。 $\delta W = M p |\delta E| > 0$ ----- (7)

この式で M (μ の大文字) は摩擦定数 (frictional constant) と考えられている。(6), (7) 式より

$$q \delta E + p(-\delta U) = \delta W = M p |\delta E|$$
 ----- (8) (8) 式より $\delta E > 0$ の場合には、
$$\frac{q}{p} = M + \frac{\delta U}{\delta E}$$
 ----- (9) なる応力比 (q/p) ~ ひずみ増分比 ($\delta U/\delta E$) 関係が導びかれる。

さて、(9) 式の誘導過程において最も重要でかつ承服しがたい仮定が (7) 式である。この (7) 式が設けられた背景をさぐるには (6) 式と $\delta U = 0$ から導びかれる次式で考えた方が考えやすい。

$$\frac{q}{p} = \frac{\delta W}{\delta E} \frac{1}{p} + \frac{\delta U}{\delta E}$$
 ----- (10)

あるいは、

$$q = \frac{\delta W}{\delta E} + p \frac{\delta U}{\delta E}$$
 ----- (11)

ここで (11) 式は Ladanyi のエネルギー補正の式⁽¹⁰⁾と全く

同じものであり、(7) 式の仮定はその摩擦成分の項と $\delta W/\delta E$ を p で割った (10) 式右辺第1項 $\delta W/\delta E$ を M とおいたと解釈できる。ただし、(11) 式は式の変形の仕方だけを変えれば次式であらわされる Bishop のエネルギー補正の式になる。 $q = \frac{\delta W}{\delta E_1} + \sigma'_3 \frac{\delta U}{\delta E_1}$ ----- (12)

(11) 式では $\delta W/\delta E$ を、(12) 式では $\delta W/\delta E_1$ を主応力差の摩擦成分と考えており、摩擦成分に一貫性がない。したがって (10) 式の右辺第1項を摩擦定数 M とおく積極的な理論的根拠はないように思われる。また摩擦定数(係数)という概念からすれば、平均主応力 p で割るよりもその面に作用する垂直応力 σ_N で割るべきもののように思われる。以上のような批判はあるが、(9) 式を M をパラメーターとして $(45^\circ + \frac{q}{2p})$ 面上の σ_N と $dE_N/d\gamma$ の関係で書きかえみると図-6 のようになる。この図より、勾配はどの程度の差がみられるけれども結局 (9) 式も (3) 式と対応する直線関係 (勾配 1.1 ~ 1.2) となることがわかる。図-4, 5, 6 からわかるように、以上述べた3つの理論はよく立つ基礎が異なるにもかかわらずほとんど同一の応力比 ~ ひずみ増分比式に帰着されるのである。

4. 砂と粘土の実験データによる検討

おどに q/p ~ ひずみ増分比の整理方法で発表したデータ^{(6),(7)} に加えて、ここでは砂と粘土の平均主応力 p 一定の排水三軸試験データを検討する。試料は豊浦標準砂と $L.L. = 43.6\%$, $P.L. = 26.1\%$, $G_s = 2.68$, clay fraction ($< 5\mu$) = 39.0% の練返し粘土 (F-clay と称する) である。図-7 は豊浦標準砂の $p = 1.0$ kg/cm^2 (一定) の排水三軸試験結果を (9) 式に対応する q/p ~

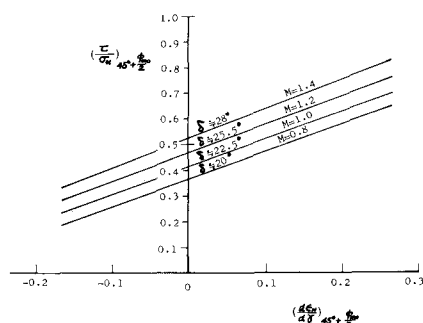


図-6 $\sigma_N \sim dE_N/d\gamma$ で表わした Roscoe-派の $q/p \sim dU/dE$ 関係を

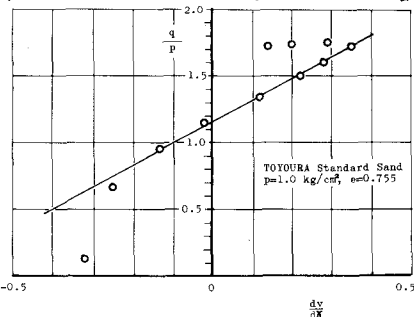


図-7 豊浦標準砂の $q/p \sim dU/d\gamma$ 関係

$d\epsilon/d\sigma$ の関係で整理したものである。ニニ $d\epsilon = d\epsilon_1 - d\epsilon_2$ があるので、(9)式によれば勾配は $3/2$ とはなるが 図-7の直線勾配は (1.5~1.6) でよく対応している。図-8は図-7と同じデータを (3)式にしたがって $(45^\circ + \frac{p}{2})$ 面上の σ_N と $d\epsilon_N/d\sigma$ の関係で整理しなおしたものである。このプロットは 図-7よりも早く直線に近づくのがみられ、その直線勾配 (1.2) もほぼ (3)式に対応する。また縦軸切片は約 0.45 で Rowe の求

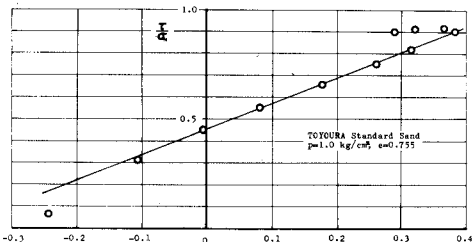


図-7

めた豊浦標準砂の粒径に対する粒子間摩擦 $\tan \delta$ に等しい。図-8 豊浦標準砂の $\sigma_N \sim d\epsilon_N/d\sigma$ 関係

図-9は正規圧密(○印)および過圧密(●印; O.C.R.=1.5)の F-clay について共に $p=1.0 \text{ kg/cm}^2$ (一定)の排水三軸試験を行なった結果を $\sigma_p \sim d\epsilon/d\sigma$ 関係で整理したものである。pが一定の場合には粘土に対して (9)式が成立するが、共にほぼ一本の直線上にのるようでありその直線勾配 (1.5~1.6) も (9)式に対応している。図-10は図-9のデータを $(45^\circ + \frac{p}{2})$ 面上の $\sigma_N \sim d\epsilon_N/d\sigma$ 関係で整理しなおしたものである。この図も図-8と同様より早く直線性が得られるようであり、その直線勾配 (1.2) はほぼ対応する。また縦軸切片が二の粘土の砂り粒子間摩擦に対応する物理定数たりえはいかと考えている。現在、過圧密はと大きくしたり、圧密状態を変えて実験中である。以上、土の応力比にむき増分比関係について各理論を比較検討し、これが土のせん断現象を支配する本質的な関係式であろうという二を述べてきたが、今後は二式をもとにして土の構成方程式を決定したいと考えている。

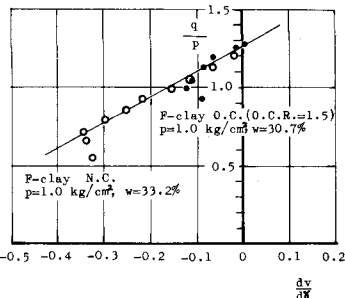


図-9 F-clay の $\sigma_p \sim d\epsilon/d\sigma$ 関係

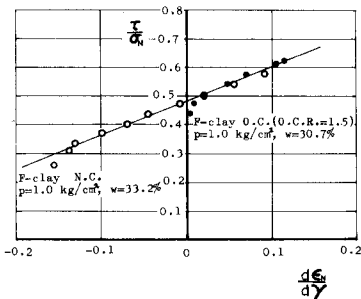


図-10 F-clay の $\sigma_N \sim d\epsilon_N/d\sigma$ 関係

謝辞 我々の指導教授であり常に温かい御指導を賜わった村山朝郎教授に感謝の意を表します。また (3)式と (9)式の形の類似性を指通され京都大学 太田秀樹 助手にも感謝します。

参考文献 1) Rowe: The Stress-dilatancy Relation for Static Equilibrium of an Assembly of Particles in Contact, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, Vol. 269, 1962, pp. 500-527. 2) Barden, Khayat, Wightman: Elastic and Slip Components of the Deformation of Sand, Canadian Geotech. J. 6, 1969, pp. 227-252. 3) Roscoe, Schofield, Thurairajah: Yielding of Clays in States wetter than Critical, Geotech. Vol. 13, 1963, pp. 211-240. 4) Schofield, Wroth: Critical State Soil Mechanics, McGRAW-HILL, 1968. 5) 村山・松岡: 粒状土のせん断抵抗と粒子構造について, 土工学第25回年次講演会 III-36, 1970. 6) 松岡・吉田・磯田: 砂と粘土のせん断機構について, 第6回土質工学研究発表会 43, 1971. 7) 村山・松岡: 砂と粘土のせん断特性の類似性とそのメカニズムについて, 京大防災研究所年報第14号B, 1971. 8) Rowe: Stress-dilatancy, Earth Pressure and Slopes, ASCE 89, SM3, 1963, pp. 37-61. 9) Lee: Soil Mechanics Selected Topics, Butterworths London, 1968, p. 228. 10) Ladanyi: Etude des relations entre les contraintes et les deformations lors du cisaillement des sols pulvérulents, Annales des Travaux Publics de Belgique, 3, 1960, pp. 241-270. 11) Bishop: Correspondence, Geotech. Vol. 4, 1954, pp. 43-45.