III－9　三次元非線型圧密理論について

京都大学工学部　正　畠昭治郎

同　　　正○太田秀樹

1. はじめに

第5回土質工学研究発表会，第6回土質工学研究発表会において，粘土の応力とひずみの関係について発表した結果を用いて，三次元の圧密理論の組み立てを試みた．その結果を従来の圧密理論のようにきれいな式の形にもっていくことはできなかったが，一応ダイレイタンシーやせん断ひずみなどを考慮の過程に組み入れた，いわゆる三次元非線型圧密理論を組み立てることができたので報告する。

2. 応力とひずみの関係

ある応力比（τ_{oct}/σ_m'）のもとで異方圧密された粘土を考える。正規圧密過程における応力比 τ_{oct}/σ_m' を k とすると，そのような異方圧密の経験を持つ正規粘土や過圧密粘土がさらに応力をくわえられたときに示す挙動が弾性的であるか弾塑性的であるかの限界，すなわち弾性限界が次式で与えられる。

$$\left|\frac{\tau_{oct}}{\sigma_m'}-k\right|+\frac{\lambda-\kappa}{(1+e_0)\mu}\ln\frac{\sigma_m'}{\sigma_{m0}'} \qquad (1)$$

ここで λ，κ はそれぞれ圧縮指数・膨張指数に対応するものであり，μ はダイレイタンシーの程度を与える係数で柴田によりはじめて定義されたものである。σ_{m0}' はその異方圧密粘土がうけた最大先行圧力であり，そのときの間げき比を σ_{m0}' に対応して e_0 と書くことにする。(1)式は異方圧密粘土の弾性限界（initial yield locus）が最大先行圧力とそのときの間げき比だけによってきまり，応力をくわえられるまえの初期応力（τ_{octi}, σ_{mi}'）とそのときの初期間げき比 e_i には無関係であることを示している。

(i). 弾性状態にある粘土の応力－ひずみ関係.

異方圧密された正規粘土や過圧密粘土に加えられる応力が

$$\left|\frac{\tau_{oct}}{\sigma_m'}-k\right| \leq -\frac{\lambda-\kappa}{(1+e_0)\mu}\ln\frac{\sigma_m'}{\sigma_{m0}'} \qquad (2)$$

の範囲内にあるとき，その粘土が弾性状態にあると私達はよんでいる。このときに粘土が示す応力－ひずみ関係は

$$\epsilon_{ij}=\frac{1}{3}\frac{\kappa}{1+e_i}\ln\frac{\sigma_m'}{\sigma_{m0}'}\cdot\delta_{ij} \qquad (3) \qquad \text{または} \qquad d\epsilon_{ij}=\frac{1}{3}\frac{\kappa}{1+e_i}\frac{d\sigma_m'}{\sigma_m'}\delta_{ij} \qquad (4)$$

で与えられるとしている。ここで δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。

(ii). 弾塑性状態にある粘土の応力－ひずみ関係.

応力状態が弾性限界をこえて，

$$\left|\frac{\tau_{oct}}{\sigma_m'}-k\right| > -\frac{\lambda-\kappa}{(1+e_0)\mu}\ln\frac{\sigma_m'}{\sigma_{m0}'} \qquad (5)$$

で与える範囲になったとき，粘土が弾塑性状態に達したとしている。この状態では降伏が進行するにつれ，粘土はひずみ硬化，またはひずみ軟化をともない，ついには限界状態(critical state)に達する。このような性質は yield locus が相似形を保ちながら拡大，または縮小していくとの仮定から得られた次式のような current yield locus によってうまく説明される。

$$\left|\frac{\tau_{oct}}{\sigma_m'}-k\right|+\frac{\lambda-\kappa}{(1+e_0)\mu}\ln\frac{\sigma_m'}{\sigma_{my}'}\equiv f=0 \qquad (6)$$

ここでσ_{my}'が硬化効果を示すパラメータである。(6)式のfを塑性ポテンシャルであるとして塑性ひずみ増分を求め，(4)式の弾性ひずみ増分と加えあわせると，弾塑性状態にある粘土の応力－ひずみ増分関係として次式が得られる。

$$d\epsilon_{ij}=\frac{\mu}{3\sigma_m'}\frac{1+e_0}{1+e_i}\left[\left\{\frac{\lambda-\kappa}{(1+e_0)\mu}\mp\frac{\tau_{oct}}{\sigma_m'}\right\}\delta_{ij}\pm\frac{1}{\tau_{oct}}(\sigma_{ij}'-\sigma_m'\delta_{ij})\right]\left[d\sigma_m'\pm\frac{d\tau_{oct}}{\frac{\lambda-\kappa}{(1+e_0)\mu}\mp\frac{\tau_{oct}}{\sigma_m'}}\right]$$

$$+\frac{\kappa}{3\sigma_m'}\frac{d\sigma_m'}{1+e_i}\delta_{ij} \qquad (7)$$

複号 上：$\tau_{oct}/\sigma_m'\geqq k$ (active state)
　　 下：$\tau_{oct}/\sigma_m'<k$ (passive state)

(7)式から体積ひずみ増分dvを計算すると，

$$dv=d\epsilon_{ij}\delta_{ij}=\frac{(1+e_0)\mu}{1+e_i}\left[\frac{d\sigma_m'}{\sigma_m'}\left\{\frac{\lambda}{(1+e_0)\mu}\mp\frac{\tau_{oct}}{\sigma_m'}\right\}\pm\frac{d\tau_{oct}}{\sigma_m'}\right] \qquad (8)$$

3. 間げき水圧の消散過程

従来の圧密理論と同じく，ここでも間げき水圧の消散過程を求めるために，水の連続式，ダルシーの法則と粘土の応力－体積ひずみ関係を連立させて演算を行なった。

(i). 連続方程式

粘土から水がしぼり出されたとき，粘土内に空洞ができないという意味で次の連続式を考える。

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z} \qquad (9)$$

ここでV_x，V_y，V_zはx，y，z方向の水の流速であり，$\frac{\partial v}{\partial t}$は体積ひずみの時間変化率である。

(ii). ダルシーの法則

最上編「土質力学」の圧密（網干）の章によれば，ダルシーの法則が土中の浸透流に対しておおむね成立するということはきわめて疑わしいとのことであるが，ここでは一応ダルシーの法則が成立するということにして議論をすすめる。ただし，以下の展開に対しては初期水頭勾配の存在を認めても重要な問題はおこらない。

$$V_x=-\frac{k_x}{\rho_w}\frac{\partial u}{\partial x}\quad,\quad V_y=-\frac{k_y}{\rho_w}\frac{\partial u}{\partial y}\quad,\quad V_z=-\frac{k_z}{\rho_w}\frac{\partial u}{\partial z} \qquad (10)$$

ここで，k_x・k_y・k_zはそれぞれx，y，z方向の透水係数を意味し，ρ_wが水の単位体積重量，uが間げき水圧をあらわす。透水係数は地中の位置(x, y, z)によってかわるような値であってもよいが，圧密の進行とともに変化するような場合には，問題が複雑になるのでここではとりあつかわないことにする。

(iii)弾塑性状態にある粘土の圧密基礎方程式.

圧密の問題に関して工学的に重要なのは，体積変化量の大きい弾塑性状態の粘土についてであることはいうまでもない。弾塑性状態の体積ひずみ増分を与える(8)式より，

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{(1+e_0)\mu}{1+e_i}\left[\left\{\frac{\lambda}{(1+e_0)\mu}\mp\frac{\tau_{oct}}{\sigma_m'}\right\}\frac{1}{\sigma_m'}\frac{\partial\sigma_m'}{\partial t}\pm\frac{1}{\sigma_m'}\frac{\partial\tau_{oct}}{\partial t}\right] \qquad (11)$$

間げき水圧の消散にしたがって粘土はその体積を減少させるが，それと同時にせん断ひずみが通常増大する。このため，地盤内の全応力も当然変化することが考えられる。しかし，間げき水圧の消散にともなう全応力分布の変化が比較的小さく，無視しても大きな誤差を生じないというような場合には，圧密期間中，全応力が一定であるとの仮定をたてることができる。これを式示すれば，

$$\frac{\partial\tau_{oct}}{\partial t}=0\ ,\qquad \frac{\partial\sigma_m}{\partial t}=\frac{\partial\sigma_m'}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial t}=0 \qquad (12)$$

これを(11)式に代入すると，

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{1}{(1+e_i)\sigma_m'}\left[-\lambda\pm(1+e_0)\mu\frac{\tau_{oct}}{\sigma_m'}\right]\frac{\partial u}{\partial t} \qquad (13)$$

(13)式と連続式・ダルシーの法則とを組み合せることにより，

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k_x}{\rho_w}\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k_y}{\rho_w}\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{k_z}{\rho_w}\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$=\frac{1}{1+e_i}\cdot\frac{1}{\sigma_m-u}\left[-\lambda\pm(1+e_0)\mu\frac{\tau_{oct}}{\sigma_m-u}\right]\frac{\partial u}{\partial t} \qquad (14)$$

ただし，k_x, k_y, k_z と σ_m, τ_{oct} は位置 (x, y) の函数であり，時間 t には一応無関係であるとしている。(14)式は間げき水圧 u に関する偏微分方程式であり，これを適当な初期条件と境界条件のもとに数値的に解けば，圧密にともなう間げき水圧の消散過程が明らかにされる。したがって(14)式は圧密の基礎方程式とよぶべきものであろう。

さて，stage construction などのように荷重の増加の時間的割合がある程度既知であるような場合には(12)式の右辺が零ではなく，時間 t の函数のような値になるだけであるから，(14)式に相当する基礎方程式は容易に導びかれる。またダルシーの法則に初期水頭勾配をつけ加えるとすれば(14)式の左辺がいくらか複雑になるだけである。さらに，透水係数 k が間げき比 e と何らかの関係にあるというような場合でも，(14)式を数値的に解く事に対してはそれほど困難な問題にはならない。なお段階荷重に対しては，その都度初期条件（初期間げき水圧分布や応力分布）をかえることによって(14)式をそのまま用いることができる。いずれの場合にも，(14)式を解析的に解こうとさえしなければ，重大な支障を与えることはない。

しかし，圧密理論がそれ自体で論理的な一貫性を持つことはできない。たとえば，ここで導びいた(14)式にしても，また種々の条件をとり去ってさらに複雑な形にした式でも，先に何らかの形で地盤内応力分布を別個に求めなければならない。したがって圧密の進行にともなう有効応力の変化がひきおこす地盤の変形が原因となって生じる全応力分布の変化は，考慮に入れることができない。このような意味で，ここで導びいた圧密理論はビオの理論のような斉合性を持たない。

(iv) 弾性状態にある粘土の圧密基礎方程式

(14)式と(7)式とを比較すると，弾塑性状態のための式λのかわりにκを入れ，μ＝0とおけば弾性状態のための式になる。したがって(14)式と同様の操作をほどこせば，圧密理論の基礎式として，次式が得られる。

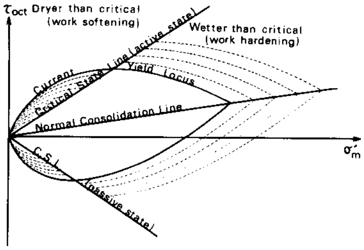
$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k_x}{\rho_w}\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k_y}{\rho_w}\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{k_z}{\rho_w}\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\kappa}{1+e_i}\,\frac{1}{\sigma_m-u}\,\frac{\partial u}{\partial t} \qquad (15)$$

4. 圧密の進行にともなう変形

三次元的な圧密の場合，地盤の変形は単に間げき比の変化だけから求められるものではなく，せん断変形の増大(または減少)が地盤の変形に寄与する度合いについても考慮に入れなければならない。せん断ひずみによる地盤の沈下は通常即時沈下の計算にだけ考慮に入れられているが，圧密の進行にともなうせん断ひずみの増減は場合によっては無視しえない。ここでは間げき水圧uの消散によって生じるひずみ増分を求めたが，この場合全応力が圧密中一定であり，ひずみの増減によって影響されないとの仮定をおいていることは前述の如く不可避の欠点であることはいうまでもない。

(i) 弾塑性状態にある粘土の変形－時間関係

有効応力は $\sigma'_{ij}=\sigma_{ij}-u\,\delta_{ij}$ で定義されるから，(14)式を解くことによって間げき水圧の変化が求まれば，全応力一定としているから結局 σ'_{ij} の増加が求まることになる。さて弾塑性状態にある粘土の応力状態は右図の current yield locus の上の点で表わされなければならない。圧密の進行と共に間げき水圧が通常減少するから，この応力点は τ_{oct} 一定のまま σ'_m が増大する方向，すなわち右方へすようにに移動する。従って wetter side の粘土は，圧密の進行と共に体積が減少し，せん断ひずみが増大する。これに反して dryer side の粘土は体積が増大しながら，いずれも弾塑性状態のまま critical state に近づこうとする。Wetter side では決して critical state に到達しないが，dryer side の粘土は場合によっては圧密の進行とともに critical state に達してしまうこともありうる。いずれにせよ，ひずみ増分の時間的変化率は(7)式より，



$$\frac{\partial\epsilon_{ij}}{\partial t}=\frac{\mu}{3\sigma'_m}\,\frac{1+e_0}{1+e_i}\left[\left\{\frac{\lambda}{(1+e_0)\mu}\mp\frac{\tau_{oct}}{\sigma'_m}\right\}\delta_{ij}\pm\frac{1}{\tau_{oct}}\left(\sigma'_{ij}-\sigma'_m\,\delta_{ij}\right)\right]\frac{\partial\sigma'_m}{\partial t} \qquad (16)$$

(ii) 弾性状態にある粘土の変形－時間関係

弾性状態の粘土の応力点は上図の current yield locus の内部にあり，それがuの減少とともに右方に動くから，しばらくは弾性状態にとどまっているが，圧密の進行とともにあるときからは弾塑性状態に達することがありうる。この場合 wetter side の弾塑性状態にしかなりえないことは注意される。弾性状態にとどまっているときのひずみ増分の時間的変化率は(6)式より

$$\frac{\partial\epsilon_{ij}}{\partial t}=\frac{1}{3}\,\frac{\kappa}{1+e_i}\,\frac{1}{\sigma'_m}\,\frac{\partial\sigma'_m}{\partial t}\,\delta_{ij} \qquad (17)$$ (せん断ひずみがないことになっている)

この場合，間げき比変化(体積ひずみ)の分だけ沈下すると考える以外に変形の計算方法はない。