III－6　Ｔｅｒｚａｇｈｉの圧密方程式が内蔵する変形条件

広島大学　正　吉国　洋

1.　まえがき

Ｔｅｒｚａｇｈｉの提案した三次元の圧密方程式の非合理性は，指適されて久しいが，その非合理性が明確にされないので，現在なを，実験室に，現場の沈下解析に，使い易いという理由で，生き続けている。これに対してＢｉｏｔの圧密論は，不飽和の場合を除いて，基本的には議論する余地のないものであるが，利用しやすい形で，解が用意されていない事と，Ｂｉｏｔの提案した方程式が圧密方程式にまで発展させられていないため，現在まであまり利用されていないし，Ｔｅｒｚａｇｈｉ理論の非合理性を指適するにも至つていない。Ｔｅｒｚａｇｈｉの三次元圧密方程式は，多くの人々によつて個々の問題に適用され，解をが与えられている。そしてその適用に際して，排水条件は，容易に入れる事ができるが，変形条件又は境界の応力条件は，入れる事ができない。従つて，Terzaghi系列の多くの研究者は，排水条件だけを考慮して，変形条件を無視して，解を求めた。ただ，中には，変形条件を無理に持ちこんで解を得ようとした人もあるが，全く無意味な，結果を得ている。Ｔｅｒｚａｇｈｉの方程式に変形条件を持ち込み得ないという事は，その方程式が，ある特定の変形条件を含んだ，特殊なケースの圧密方程式である事を暗示している。そしてこの変形条件ないしは，境界の応力条件については未だ確定しておらず，混乱した状態にある。この研究は先に発表した圧密方程式を更に検討し，Ｔｅｒｚａｇｈｉの圧密方程式が内蔵する変形条件を明らかにしようとするものである。

2.　圧密方程式の誘導とその検討

圧密方程式の誘導はすでに発表したものであるが，後の討議に必要なので簡単に記述する。方程式の誘導には，土の特性を次のように仮定した。尚この仮定は，Ｔｅｒｚａｇｈｉ及びＢｉｏｔの仮定と同一である。　1）等方等質弾性体　2）完全飽和　3）土粒子，水の非圧縮性　4）微少ひずみ　5）Ｄａｒｃｙの法則　以上。

変位で表わした釣合方程式は *Lamé* の定数 λ, μ を使つて次のように書ける。

$$(\lambda+2\mu)\,\mathrm{grad}\,e - \mu\,\mathrm{rot}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u} + \mathrm{grad}\,u = 0 \tag{1}$$

ここに　$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$　$\boldsymbol{u}$：変位ベクトル，u：間隙水圧である。

(1)式の div をとると

$$(\lambda+2\mu)\,\mathrm{div}\cdot\mathrm{grad}\,e + \mathrm{div}\cdot\mathrm{grad}\,u = 0$$

$$\nabla^2\left((\lambda+2\mu)e + u\right) = 0$$

そこで

$$\varphi = (\lambda+2\mu)e + u \quad とおき, \tag{2}$$

φを圧密における，Ｔｏｔａｌ　Ｐｏｔｅｎｔｉａｌと呼ぶ事にする。そしてφはLaplaceの方程式を満足する。

$$\nabla^2\varphi = 0 \tag{3}$$

(3)式の主要解は，三次元の場合に，次のようである。

$$\varphi = (\lambda+2\mu)e + u = C_1\frac{1}{r} + C_2 \tag{4}$$

ここに　C_1，C_2 は積分定数であり　$r = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$　である。

(4)式を時間について微分し，連続条件式 $\dot{e} = -\frac{k}{\gamma_w}\, div \cdot grad\, u$ を考えるならば，圧密方程式を次のように書く事が出来る。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C\nabla^2 u + \frac{\partial}{\partial t}\left(c_1\frac{1}{r} + c_2\right) \tag{5}$$

ここに $C = \frac{k}{\gamma_w}(\lambda+2\mu)$ であり，圧密係数である。

次に，積分定数 C_1, C_2 の性格について検討してみる。

Case 1） $C_1=0,\ C_2=0,\ \varphi=0$ の場合

今ある土塊に外力が作用した瞬間，まだ排水は進行していないとすれば $e=0$ 従つて $u=0$。又 $t\to\infty$ のとき，$u\to 0$，従つて $e\to 0$。このような事は圧密には存在しない。

Case 2） $C_1=0,\ C_2\neq 0,\ \varphi = C_2$ の場合

このケースに於てはTotal Potentialは一様に分布し

$$grad\,\varphi = (\lambda+2\mu)\,grad\,e + grad\,u = 0 \tag{6}$$

である。(6)式は，(1)式との比較に於いて

$$rot\cdot rot\,\mathbf{u} = 0 \tag{7}$$

(7)式は，$C_1=0,\ C_2\neq 0$ であるための条件式であり，土塊の平面変形を意味している。この場合，即ち，平面変形条件のもとでの，圧密方程式は，次のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C\nabla^2 u + \frac{d}{dt}C_2 \tag{8}$$

Case 3） $C_1\neq 0,\ \varphi = c_1\frac{1}{r}+c_2$ の場合

この場合，$C_2\neq 0$ 又は $C_2=0$ という事はあまり重要な意味をもたず，$C_1\neq 0$ の条件だけで一般性は失なわない。$C_1\neq 0$ の変形条件は $C_1=0$ のときの議論からすぐに得られ

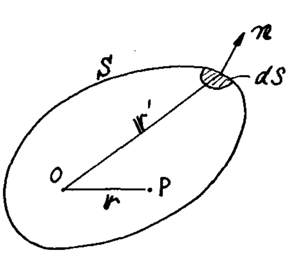
$$rot\cdot rot\,\mathbf{u}\neq 0$$

である。これは土塊の変形が，平面形をしない場合であり，Total Potentialが土塊内である分布をする事を意味している。そして圧密方程式は次のようになる

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C\nabla^2 u + \frac{\partial}{\partial t}\left(c_1\frac{1}{r} + c_2\right) \tag{9}$$

以上の議論から，圧密の問題は　土塊の変形が平面変形であるか　否かによつて大きく二分され，Total Potential　は，夫々，一様又はある分布をもつ。しかし Total Potential　が0であるような事は，圧密にはあり得ない。従つてTerzaghiの圧密方程式が認められるためにはTotal Potention　が時間的に変化しない場合，$\dot{\varphi}=0$ の場合に限る事になる。このような条件は，どのような場合に満たされるのかを検討してみよう。

先づ(3)式にGreenの定理を適用すると任意点PのTotal Potential　は次式のようである。



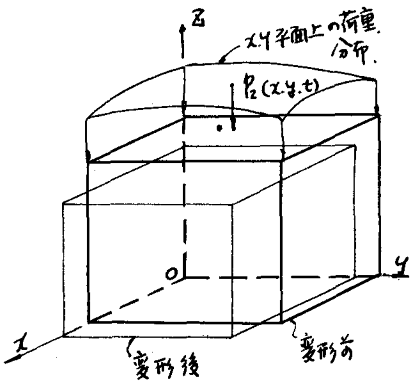
$$\dot{\varphi}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_S\left\{\frac{1}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}\frac{\partial\varphi(\mathbf{r}')}{\partial n} - \varphi(\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}\right)\right\}dS \tag{10}$$

ここに　S：土塊の表面積，n：表面に垂直な方向

そこで(10)式は，(4)式と等価である。 今，$C_1=0$ の場合，即ち $\mathrm{rot}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}=0$ の場合には，Total Potential φ は，一様に分布しているので $\mathrm{grad}\,\varphi=0$ である。従つて(10)式の右辺第1項の $\partial\varphi(r')/\partial n$ の値も0である。その事は(10)式においてC_1の主要な働きをしているのが，右辺第1項である事を意味している。 $C_1\neq0$ の場合に $\dot{\varphi}=0$ であるためには，少くとも(10)式右辺第1項が0とならねばならない。しかし 任意点Pと境界面との相対位置が，時間的に変化する事から $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{|r'-r|}\right)\neq0$ である。又 Total Potential が一様に分布していない事と境界面の形の変化に伴つてNormal 方向も 時間と共に変化する。従つて $\frac{\partial}{\partial t}\left(\partial\varphi(r')/\partial n\right)\neq0$ である。この二つの事を考え合せると $C_1\neq0$ の場合に(10)式 右辺第1項は，決して0とはなり得ない。即ち $\mathrm{rot}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}\neq0$ （平面変形でない）場合にはTerzaghiの方程式は，認められない。従つて Terzaghiの方程式が，認められるとすれば，それは 平面変形条件（$\mathrm{rot}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}=0$）の下においてのみである。しかし この場合も一般には $\dot{\varphi}\neq0$ であり，$\dot{\varphi}=0$ は更に特殊な条件を必要とする。 その事を $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}=0$ の場合の2,3の例によつて示そう。

3. 平面変形条件のもとでの圧密方程式

1) Rectilinear Flow Case



今，立方体の土塊を考え，立方体の各境界面は，圧密過程中常に平面を保ち，もとの平面と平行に変位するものと考える。従つて，境界面上には 直応力だけが作用し，せん断応力は存在しない。又 任意の境界面から排水は，行なわれるものとする。このような変形条件のもとでは $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}=0$ であり

$$\varphi=(\lambda+2\mu)e+u=C_z \tag{11}$$

である。又 圧密方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c\nabla^2u+\frac{d}{dt}C_z \tag{12}$$

である。一方Z方向の釣合方程式及びHook則は夫々

$$\sigma_z'+u=\sigma_z=p_z \qquad (\text{Z方向にConst.}) \tag{13}$$

$$\sigma_z'=\lambda e+2\mu\varepsilon_z \tag{14}$$

(11)，(13)，(14)式を 体積全体に亘つて積分し，その体積で除すならば

$$(\lambda+2\mu)\bar{e}+\bar{u}=C_z\ ,\quad \bar{\sigma}_z'+\bar{u}=\bar{p}_z \quad および \quad \bar{\sigma}_z'=\lambda\bar{e}+2\mu\bar{\varepsilon}_z$$

を得る。 ここに $\bar{e}$，$\bar{u}$，$\bar{\sigma}_z'$，$\bar{p}_z$，$\bar{\varepsilon}_x$，$\bar{\varepsilon}_y$ および $\bar{\varepsilon}_z$ は夫々体積全体の平均値である。そして 上の3つの式から

$$C_z=\bar{p}_z+2\mu(\bar{\varepsilon}_x+\bar{\varepsilon}_y)$$

であり，圧密方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c\nabla^2u+\frac{d\bar{p}_z}{dt}+2\mu\frac{d}{dt}(\bar{\varepsilon}_x+\bar{\varepsilon}_y) \tag{15}$$

である。 (15)式の右辺第2，第3項が0であるならばTerzaghiの方程式となる。以上の議論は $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}=0$ のCaseについてであるが，境界面にせん断応力が一様に分布する $\mathrm{rot}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}=0$ のCaseについても (15)式が得られる。従つて Terzaghi の方程式がすでに含んでいる変形条件は，$\mathrm{rot}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}=0$ で，かつ $\bar{\varepsilon}_x+\bar{\varepsilon}_y=0$ という事になる。

$\dot{p} \neq 0$ の場合にも　確かに $\dot{\varphi} \neq 0$ であるけれども，これは　漸増荷重による圧密の問題であつてTerzaghiの方程式にも認められる。

2) Radial and Vertical Flow Case

(15)式を円筒座標で表現すればすぐにこのCaseの圧密方程式は得られる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right\} + \frac{d\bar{p}_z}{dt} + 2\mu\frac{d}{dt}\left(\bar{\varepsilon}_r + \bar{\varepsilon}_t\right) \tag{16}$$

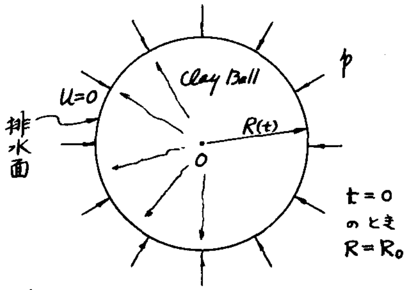
(16)式が成立するためには $rot.rot\, u = 0$ でなければならないが，それはBarron のいう　等ひずみの場合である。そして，Terzaghi が成立するためには $\bar{\varepsilon}_r + \bar{\varepsilon}_t = 0$ ，即ち，円筒の内外径が時間的に変化しない事が必要である。　尚　Barron　は自由ひづみの場合にTerzaghiが成立すると述べているが，自由ひずみの場合には $rot.rot\, u \neq 0$ であつて，Terzaghiは成立しない。又，等ひずみの圧密方程式として $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = c\,\nabla^2 u$ を提案したが $\bar{u}$ は土塊全体の平均値であるからこの式の左辺は，位置的に定数である。したがつて，体積ひずみを表わす右辺も，位置的に定数でなければならない。これはBarron のおいた Vertical Strain Only 及び Equal Strain の仮定からもたらされる当然の帰結であるが，それは無意味である。

3) 球の場合

Cryer は球形試料の等方圧密についてTerzaghiとBiot理論の解を求めた。そして球の中心の間隙水圧の挙動について比較し，両者の解の間にきわだつた相違がある事を示した。　それは，球の中心の間隙水圧が　Terzaghi に於いては，単調に減少するのに対し，Biotに於いては，圧密の初期，一旦増加し，その後減少する。そして両者の解が一致するのは，ポアソン比0.5の時であるとした。球の等方圧密に於いては $rot\, u = 0$ であるから

$$\varphi = (\lambda + 2\mu)e + u = C_z$$

$$\dot{u} = c\nabla^2 u + \dot{C}_z$$



である。これに，境界の排水条件および応力条件

$t > 0$ のとき r = Rにおいて　$u = 0$, $\sigma_r' = p$

を入れると，球の圧密方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\nabla^2 u + \frac{dp}{dt} + 4\mu R_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{R}\right) \tag{17}$$

となる。今の場合　$\dot{p} = 0$, $c\nabla^2 u \leqq 0$, $4\mu R_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{R}\right) > 0$ である。又圧密の初期，球の中心附近に於いては $\nabla^2 u \fallingdotseq 0$ であり，$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{R}\right)$ の値は，圧密の初期に最も大きいので $\left|c\nabla^2 u\right| < 4\mu R_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{R}\right)$ の関係が成立する。このような場合には $\frac{\partial u}{\partial t} > 0$ であり間隙水圧は増大する。圧密の進行と共に $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{R}\right)$ の値が減少するので，或る時期に大小関係が逆転し，間隙水圧は減少を始める。このように荷重は一定のままで，間隙水圧は増大するのは(17)式の　右辺第３項が０とならず　常に正である事に原因する。　即ち，　球の場合 $\dot{p} = 0$ のもとで $\dot{\varphi} \neq 0$ である。

この事から球の場合，Terzaghiの圧密方程式は成立しない。又 $\nu = 0.5$ のときは(17)式全体が無意味となる。

4.　あとがき　結論的にTerzaghiの圧密方程式は，平面変形条件（ $rot.rot\, u = 0$ ）のもとで，第２，第３平均主ひずみの和が０（ $\bar{\varepsilon}_x + \bar{\varepsilon}_y = 0$ ）という条件をすでに含んでいる。

参考文献：熱伝導型圧密方程式と境界条件についての一考察：吉岡洋　第24回土木学会年次講演会