

II-163 円形暗きよにより淡水を注入した場合の淡塩境界面の解析

九州大学工学部 正員 上田年比古

" " 杉尾 哲

学生員。神野 健二

1. まえがき

本報は、塩水で飽和され下均一な透水係数の半無限領域に、円形暗きよを設けて淡水を注入したときの流れの様子を解析したものである。Darcyの法則が成立する範囲で淡水を注入してゆくと、塩水との境界面、すなわち淡塩境界面は時間の経過とともに、淡水によって押し下げられ、ついには一定の位置で定常状態となる。解析は、この定常状態に達したときの淡塩境界面、および淡水部分の複素ポテンシャルを求めたものである。淡塩境界面をZhoukovsky関数で直線化し、 θ 平面に写像、この θ 平面を、Schwarz-Christoffel変換を用いて p 平面に写像し、最終的には、この平面の偏角を $1/2$ にたんで、複素ポテンシャルが既に判っている w 平面に写像している。したがって、各平面間の関係式、すなわち写像関数から、最初の領域 Z 平面と、複素ポテンシャルが既知の w 平面との対応がつき、解が得られることになる。

2. Zhoukovsky関数

領域は、図-1に示すように、地表面から d の深さのところに、半径 r の円形暗きよを埋設し、 h の水頭を与え、淡水を注入している。座標軸は、 E 点を原点、上向きに y 軸、右向きに x 軸ととっている。図中の記号は、

γ_f : 淡水の単位体積重量

γ_s : 塩水の単位体積重量

q : 淡水の注入量 k : 透水係数

d : 暗きよ埋設深さ r : 暗きよ半径

h : 水頭差

淡塩境界面について考えると、境界面上任意点の圧力が、

$$P_s = -\gamma_s y_s \quad (1)$$

で与えられる。また、Darcyの法則と、非回転運動であることから、速度ポテンシャル Φ が存在し、

$$\Phi = k \left(\frac{1}{\gamma_f} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + y \right) \quad (2)$$

が、淡水部分の流れについて成立する。淡塩境界面上では、 $y = y_s$ とすると(2)から

$$\Phi_s = k \left(\frac{1}{\gamma_f} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + y_s \right), \text{したがって、(1)と}$$

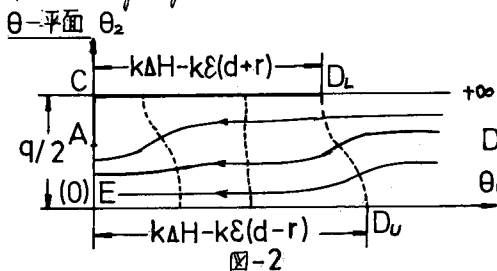
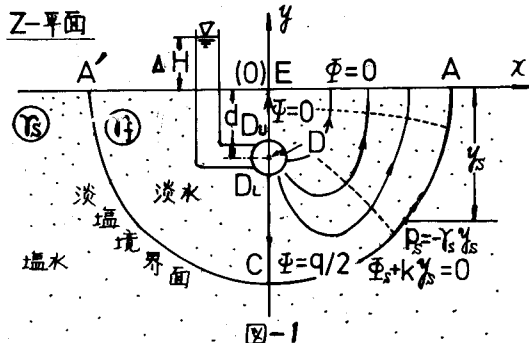
この式に代入すれば、

$$\Phi_s = k \left(-\frac{\gamma_s y_s}{\gamma_f} + y_s \right) = -k \left\{ \left(\frac{\gamma_s - \gamma_f}{\gamma_f} \right) \cdot y_s \right.$$

よって、 $(\gamma_s - \gamma_f)/\gamma_f = \varepsilon$ とおくと、

$$\Phi_s = -k \varepsilon y_s, \text{ または、} \Phi_s + k \varepsilon y_s = 0$$

$$\theta_1 = \Phi + k \varepsilon y \quad (3)$$



という関数を定義すれば、淡水境界面上では、 $\theta_{1s} = \bar{\psi}_s + kE y_s = 0$ となり、一定値となる。 θ_1 の共役関数 θ_2 を次のように定義する。

$$\theta_2 = \bar{\psi} - kEx \quad (4), \quad \bar{\psi} \text{ は流れ関数である。}$$

(4) と (5) とから、

$$\theta = \theta_1 + i\theta_2 = \bar{\psi} + i\bar{\psi} - i kE(x + iy) = W - i kEz \quad (5) : \text{Zhoukovsky 関数}$$

θ は、 θ_1, θ_2 がともに Laplace の方程式を満すから、正則な関数である。この Zhoukovsky 関数を用い、図-1 の z 平面を、図-2 の θ 平面に写像することができる。 z 平面と θ 平面の各点の対応と下の表-1 に示している。

表-1	地表面 (EA')	淡水境界面 (CA)	暗礁中心線上 (EC)		暗 礁	
			流出点より上 (ED)	流出点より下 (DC)	周壁下端点 (D _u)	周壁下端点 (D _l)
z 平面	$x, y=0$	x, y_s	$x=0, y$	$x=0, y$	$x=0, y=-d+r$	$x=0, y=-d-r$
W 平面	$\bar{\psi}=0, \bar{\psi}$	$\bar{\psi}, \bar{\psi}=\frac{q}{2}$	$\bar{\psi}=0, \bar{\psi}=0$	$\bar{\psi}, \bar{\psi}=\frac{q}{2}$	$\bar{\psi}=kAH, \bar{\psi}=0$	$\bar{\psi}=kAH, \bar{\psi}=\frac{q}{2}$
θ 平面	$\theta=0, \theta_2=\bar{\psi}$	$\theta=0, \theta_2=\frac{q}{2}-kEx$	$\theta_1, \theta_2=0$	$\theta_1, \theta_2=\frac{q}{2}$	$\theta_1=kAH-kE(d-r), \theta_2=0$	$\theta_1=kAH-kE(d+r), \theta_2=q/2$

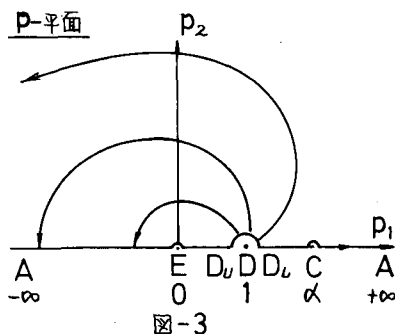
3. Schwarz-Christoffel 変換

図-2 の帯状に長い長方形領域 EDD_1D_2C を半平面 P 平面に写像する。 θ 平面上の各点を P 平面では、図-3 のようにとるとき、Schwarz-Christoffel の変換式は、次のようになる。

$$\theta = M \int \frac{dp}{\sqrt{p} \sqrt{p-\alpha} (p-1)} + C \quad (6)$$

α は、 $\alpha > 1$ なる定数、 M, C は複素定数である。図-3 の P 平面を、図-4 の t 平面に写像するには、 $t = \sqrt{p}$ とおけばよい。このとき、(6) は、

$$\theta = M \int \frac{2dt}{\sqrt{t^2-\alpha} (t^2-1)} + C \quad (7)$$



積分して

$$\theta = -\frac{iM}{\sqrt{\alpha-1}} \ln \frac{\sqrt{t^2-\alpha} - it\sqrt{\alpha-1}}{\sqrt{t^2-\alpha} + it\sqrt{\alpha-1}} + C \quad (8)$$

よって、 $M = M_1 + iM_2, C = C_1 + iC_2, \theta = \theta_1 + i\theta_2, t = t_1 + it_2$ として、(8) を実部、虚部に分解すると、

$$\theta_1 = \frac{M_2}{2(\alpha-1)} \ln \frac{(A-t_2\sqrt{\alpha-1})^2 + (B+t_1\sqrt{\alpha-1})^2}{(A+t_2\sqrt{\alpha-1})^2 + (B-t_1\sqrt{\alpha-1})^2} + \frac{M_1}{\sqrt{\alpha-1}} \tan^{-1} \frac{2\sqrt{\alpha-1}(At_1+Bt_2)}{A^2+B^2-(\alpha-1)(t_1^2+t_2^2)} + C_1 \quad (9)$$

$$\theta_2 = -\frac{M_1}{2(\alpha-1)} \ln \frac{(A-t_2\sqrt{\alpha-1})^2 + (B+t_1\sqrt{\alpha-1})^2}{(A+t_2\sqrt{\alpha-1})^2 + (B-t_1\sqrt{\alpha-1})^2} - \frac{M_2}{\sqrt{\alpha-1}} \tan^{-1} \frac{2\sqrt{\alpha-1}(At_1+Bt_2)}{A^2+B^2-(\alpha-1)(t_1^2+t_2^2)} + C_2 \quad (10)$$

ただし

$$A = \sqrt{\frac{t_1^2-t_2^2-\alpha + \sqrt{(t_1^2-t_2^2-\alpha)^2 + 4t_1^2t_2^2}}{2}}$$

$$B = \sqrt{\frac{-(t_1^2-t_2^2-\alpha) + \sqrt{(t_1^2-t_2^2-\alpha)^2 + 4t_1^2t_2^2}}{2}}$$

次に、D 点、E 点、C 点の各点の値から、 M_1, M_2, C_1, C_2 の値を求める。

〔D 案〕 $t_1 = 1, t_2 = 0$ であるから, (10) において,

$$\theta_2 \rightarrow \infty \text{ となるためには, } M_1 = 0$$

〔E 案〕 $t_1 = t_2 = 0, \theta_1 = \theta_2 = 0$ であるから, (9),

$$(11) \text{ から } C_1 = C_2 = 0$$

〔C 案〕 $t_1 = \sqrt{\alpha}, t_2 = 0, \theta_1 = 0, \theta_2 = \pi/2,$

$$\therefore -M_2/\sqrt{\alpha-1} = g/2\pi$$

したがって, (9), (10) は, 次のようになる。

$$\theta_1 = \frac{g}{4\pi} \ln \frac{(A-t_2\sqrt{\alpha-1})^2 + (B+t_1\sqrt{\alpha-1})^2}{(A+t_2\sqrt{\alpha-1})^2 + (B-t_1\sqrt{\alpha-1})^2} \quad (11)$$

$$\theta_2 = \frac{g}{2\pi} \tan^{-1} \frac{2\sqrt{\alpha-1}(At_1 + Bt_2)}{A^2 + B^2 - (\alpha-1)(t_1^2 + t_2^2)} \quad (12)$$

4. 解析

図-4 の t 平面では, 複素ポテンシャル w は既知で, $w = \mu \ln \frac{t+1}{t-1} + \mu'$ で与えられる。
 $w = \Phi + i\Psi$ とし, 実部と虚部とに分け, μ, μ' の値を定めると,

$$\Phi = \frac{g}{4\pi} \ln \frac{(t_1+1)^2 + t_2^2}{(t_1-1)^2 + t_2^2} \quad (13) \quad \Psi = \frac{g}{2\pi} \tan^{-1} \frac{-2t_2}{t_1^2 + t_2^2 - 1} \quad (14)$$

一方, (3), (4) に, (11), (12) を代入すると,

$$\Phi = \frac{g}{4\pi} \ln \frac{(A-t_2\sqrt{\alpha-1})^2 + (B+t_1\sqrt{\alpha-1})^2}{(A+t_2\sqrt{\alpha-1})^2 + (B-t_1\sqrt{\alpha-1})^2} - K\epsilon y \quad (15) \quad \Psi = \frac{g}{2\pi} \tan^{-1} \frac{2\sqrt{\alpha-1}(At_1 + Bt_2)}{A^2 + B^2 - (\alpha-1)(t_1^2 + t_2^2)} + K\epsilon x \quad (16)$$

(16) によって, (13), (14) と, (15), (16) とから, z 平面と t 平面とが, w 平面を媒介として対応づけられたことになる, 解が求まった z と t になる。そこで, 各案の境界条件を与えて, 未知定数, $\alpha, \beta, r,$ g の値を定める。

〔D 案〕 $t_1 = \beta, t_2 = 0, \Phi = K\alpha H$ であるから, (13) から $K\alpha H = \frac{g}{4\pi} \ln \frac{(\beta+1)^2}{(\beta-1)^2} \quad (17)$

$$y = -(d-r), A = 0, B = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \text{ を (15) に代入すると,}$$

$$K\alpha H = \frac{g}{4\pi} \ln \frac{(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \beta\sqrt{\alpha-1})^2}{(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \beta\sqrt{\alpha-1})^2} + K\epsilon(d-r) \quad (18)$$

〔E 案〕 $t_1 = r, t_2 = 0, \Phi = K\alpha H$ であるから, (13) から

$$K\alpha H = \frac{g}{4\pi} \ln \frac{(r+1)^2}{(r-1)^2} \quad (19)$$

このとき, (17) と (19) とから, $\beta < 1, r > 1$ を考慮して, $r = \frac{1}{\beta} \quad (20)$

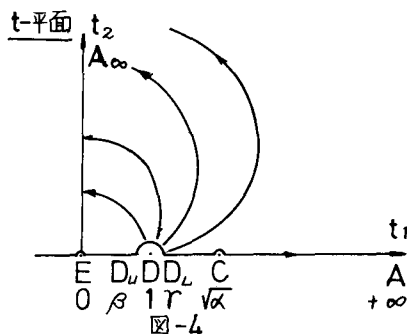
また, $y = -(d+r), A = 0, B = \sqrt{\alpha^2 - 1}/\beta$ を (15) に代入すれば,

$$K\alpha H = \frac{g}{4\pi} \ln \frac{(\sqrt{\alpha^2 - 1}/\beta + \sqrt{\alpha-1}/\beta)^2}{(\sqrt{\alpha^2 - 1}/\beta - \sqrt{\alpha-1}/\beta)^2} + K\epsilon(d+r) \quad (21)$$

(17) から, $\frac{g}{4\pi} = \frac{K\alpha H}{\ln \left(\frac{\beta+1}{\beta-1} \right)^2}$, これを, (18), (19) に代入すると,

$$\frac{1+\beta}{1-\beta} = \left(\frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \beta\sqrt{\alpha-1}}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \beta\sqrt{\alpha-1}} \right)^2 \cdot \frac{1}{\left\{ 1 - \frac{K\epsilon(d-r)}{K\alpha H} \right\}} \quad (22)$$

および,



$$\frac{\sqrt{\alpha-1}+\sqrt{\beta^2+1}}{\sqrt{\alpha-1}-\sqrt{\beta^2+1}} = \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) \left\{ 1 - \frac{KE(d+r)}{K\Delta H} \right\} \quad (23)$$

$$\gamma = \tau, (23) = F \text{ とおくと, (23) から } \alpha = \frac{4F(1-\beta^2)}{4\beta^2 - \{F(1-\beta^2) - (1+\beta^2)\}^2} \quad (24)$$

同様にして (22) = G とおくと, (22) から

$$\beta = \frac{G-1}{G+1} \quad (25)$$

d, r, ΔH, E の値を与えと, (24), (25) を使って反復計算により, α, β の値が得られる。

$$(17) \text{ から } \frac{g}{K\Delta H} = \frac{2\pi}{\ln \left\{ \frac{\beta+1}{\beta-1} \right\}} \quad (26)$$

上で得られた β を用いると, (26) から g が求められる。淡水境界面の形状については, 図-4 から,

$t_1 \geq \sqrt{d}$, $t_2 = 0$, $A = \sqrt{t_1^2 - d}$, $B = 0$, ゆえに, (3), および (4) から

$$\Phi = \frac{g}{2\pi} \ln \frac{t_1+1}{t_1-1}, \quad \Psi = g/2$$

これと, (15), (16) に代入すれば, 淡水境界面の式が得られる。

$$x_s = \frac{1}{KE} \left\{ \frac{g}{2} - \frac{g}{2\pi} \ln \frac{2\sqrt{d-1} \cdot \sqrt{t_1^2 - d} \cdot t_1}{(t_1^2 - d) - (d-1)t_1^2} \right\} \quad (27)$$

$$y_s = \frac{-g}{2\pi KE} \ln \frac{t_1+1}{t_1-1} \quad (28)$$

5. 計算結果および実験結果

図-5 に, $\Delta H/d = 0.15$, $r/d = 0.1$ の場合の淡水境界面について, (27), (28) の理論淡水境界面と, 実験による境界面とを示している。実験は, 前面アクリライト板の水槽に, 過マンガン酸カリウムで着色した塩水で砂を飽和させ, 半径 2 cm の暗きよから淡水を注入した。埋設深さは 20 cm, 木頭差は 3 cm とした。2 の実験では, 水槽底面の影響の結果, 淡水境界面が, 計算による境界面よりも上方になっている。また, $x \geq x_s$, $y=0$ では, 淡水と塩水との混合がおきて, 幾分, 横方向に広がっている。

なお, 本研究は, 文部省科学研究費の補助を受けた。2 に記して, 謝儀を表す。

