

II-161 淡水層地盤内の海水取水円形暗きよによる淡水境界面.

九州大学工学部 正会員 上田年比古 ○杉尾 哲

1. まえがき. 海岸地帯の均一な透水性の地盤内において, 地表部分に淡水があり, その下部は海水で飽和されている場合に, その海水で飽和されている部分に円形暗きよを設けて海水を取水し, 淡水境界面を部分的に低下させることを考える. 解析手法としては Zhukovsky 関数を用いて未知の淡水境界面を直線境界に写像し, この写像後の領域を Schwarz-Christoffel 変換などによって半無限領域内に写像すれば, 円形暗きよへのポテンシャル流が無限領域に流入点が2個ある場合のポテンシャル流に写像でき, 淡水境界面の形状と暗きよ取水量との関係などを知ることができる.

2. Zhukovsky 関数. Darcy の法則がなりたつ範囲の二次元定常浸透流の解析に複素ポテンシャルを用いると非回転定常流の基礎理論と Darcy の式より, 図-1 の領域では $\Phi = f_0\{(P/W_s) + y\}$ (1) がなりたつ. ここに W_s : 海水の単位体積重量, W_f : 淡水の単位体積重量である.

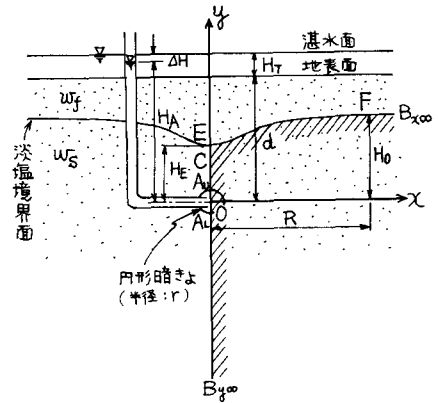


図-1 Z-平面.

いま淡水境界面上の速度ポテンシャル Φ_{fs} を考えると,

$$\Phi_{fs} = W_f(H_T + d - y) \quad \text{式-(1) に代入して}$$

$$\Phi_{fs} = f_0\{(W_f/W_s)(H_T + d) + y \cdot (W_s - W_f)/W_s\}$$

ここに $(W_s - W_f)/W_s = \varepsilon$ とおき, 上式を変形すると

$$\Phi_{fs} - f_0 \varepsilon y = f_0(1 - \varepsilon)(H_T + d) = \text{const}$$

したがって $\theta_1 = \Phi - f_0 \varepsilon y$ (2) で表わされる関数を導入すれば, 淡水境界面は

θ -平面内では $\theta_1 = \text{const}$ の直線に写像される. ここに θ_1 の共役関数 θ_2 は $\theta_2 = \psi + f_0 \varepsilon x$ (3)

となり, 次式をうる. $\theta = \theta_1 + i\theta_2 = \Phi + i\psi + i f_0 \varepsilon (x + iy) = W + i f_0 \varepsilon Z$ (4)

この式-(4)を使って Z-平面, W-平面, θ -平面 の対応を求めると下表のようになる.

次に y 軸上 (ED 区間) の θ_1 の変化を調べてみると, $\partial\theta_1/\partial y = f_0(\partial\psi/\partial y)/W_s + 1 - \varepsilon$ (5)

ここに E 点は突み点であり, E 点より下で E 点の近傍では浸透流速がきわめて小さいから静水圧分布がなりたち, $(\partial\psi/\partial y)/W_s = 1$ したがって E 点の近傍では $\partial\theta_1/\partial y = -f_0 \varepsilon < 0$ となって,

E 点より y 軸に沿って D 点へ向うとき, 図-2 に示すように $\theta_1 > \theta_{1E}$ なる部分が生ずる. しかし E 点よりはなれるに従って流速が大きくなってくから, $(\partial\psi/\partial y)/W_s$ は $[-1 \rightarrow 0]$ となり, $\partial\theta_1/\partial y$

位置	淡水境界			暗きよ中心線	
	F 点	F ~ E	E 点	E ~ Au	Au ~ By _∞
Z-平面	$x=R, y=H_0$	x, y	$x=0, y=H_E$	$x=0, y$	$x=0, y$
W-平面	$\Phi = f_0(1-\varepsilon)(H_T+d) + f_0 \varepsilon H_0$ $\psi = \delta/2$	Φ $\psi = \delta/2$	$\Phi = f_0(1-\varepsilon)(H_T+d) + f_0 \varepsilon H_E$ $\psi = \delta/2$	Φ $\psi = \delta/2$	Φ $\psi = 0$
θ -平面	$\theta_1 = f_0(1-\varepsilon)(H_T+d)$ $\theta_2 = \delta/2 + f_0 \varepsilon R$	$\theta_1 = f_0(1-\varepsilon)(H_T+d)$ $\theta_2 = \delta/2 + f_0 \varepsilon x$	$\theta_1 = f_0(1-\varepsilon)(H_T+d)$ $\theta_2 = \delta/2$	θ_1 $\theta_2 = \delta/2$	θ_1 $\theta_2 = 0$

は〔負 $\rightarrow$ 0 $\rightarrow$ 正〕と変化し、流入点Dの直傍のE点側では $\partial\theta_1/\partial y = +\infty$ となる。

そこで $\partial\theta_1/\partial y = 0$ の点をC点と置き、Z-平面のハッチの部分を写像すると、図-3 (θ -平面)のハッチの部分のようになる。

3. 写像の繰返し、 図-2のハッチの部分にSchwarz-Christoffelの変換式により、 t -平面(図-4)の実軸の上半面に写像する。ここにE点が $t=0$ に、D点が $t=1$ にあつてB点が $t=\infty$ に写像されるように写像関数を求めると、

$$\theta = M \int \frac{t-m^2}{\sqrt{t}(t-1)} dt \quad (6)$$

となる。ここにMは積分係数である。

さらに $t = -\xi^2$ (7) とおくと、式(6)は

$$\begin{aligned} \theta &= -2Mi \int \frac{\xi^2 + m^2}{\xi^2 + 1} d\xi = -2Mi \left\{ \xi + (m^2-1) \tan^{-1} \xi \right\} + C \\ &= -2Mi\xi - M(1-m^2) \ln \left| \frac{1-i\xi}{1+i\xi} \right| + C \quad (8) \end{aligned}$$

となり、式(7)によつて、 t -平面の上半面は図-4の四半面の内部(ハッチの部分)に写像される。ここに式(8)のCは積分積分定数である。

ここで式(8)に $\theta = \theta_1 + i\theta_2$, $\xi = \xi + i\eta$, $M = M_1 + iM_2$ であり、 $C = C_1 + iC_2$ を代入して実数部と虚数部にわけると、

$$\theta_1 = 2(M_1\eta + M_2\xi) - (1-m^2) \cdot (M_1\operatorname{Re} - M_2\operatorname{Im}) + C_1 \quad (9)$$

$$\theta_2 = -2(M_1\xi - M_2\eta) - (1-m^2) \cdot (M_1\operatorname{Im} + M_2\operatorname{Re}) + C_2 \quad (10)$$

$$\text{ここには} \quad \operatorname{Re} = \frac{1}{2} \ln \frac{\xi^2 + (\eta+1)^2}{\xi^2 + (\eta-1)^2} \quad (11), \quad \operatorname{Im} = \tan^{-1} \frac{2\xi}{\xi^2 + \eta^2 - 1} \quad (12)$$

4. 係数と定数の決定。

流入点D ($\xi=0, \eta=-1$) において式(11)より $\operatorname{Re} = -\infty$ となる。しかし θ_2 は図-3に示すように $\theta_2 \pm \infty$ であるから式(10)より $(1-m^2) \cdot M_2 = 0$ 。
 ことに $1-m^2 \neq 0$ であるから $M_2 = 0$ となる。またE点($\xi=\eta=0$)では式(11)より $\operatorname{Re}=0$ となる。また式(2)より $\theta_1 = \operatorname{Re}(1-\varepsilon)(Hr+d)$ 、したがつて、式(9)より $C_1 = \operatorname{Re}(1-\varepsilon)(Hr+d)$ となる。

次に、式(12)の値は y 軸上では、ED区間もDB y_∞ 区間も

$\operatorname{Im} = \tan^{-1} 0$ であるが、図-5の、暗きよ周壁に相当する曲線Sに沿つて $X = 2\xi/(\xi^2 + \eta^2 - 1)$ の变化を調べてみると、 $\{\xi > 0, \xi^2 + \eta^2 > 1\}$ の領域で $X > 0$ 、 $\{\xi > 0, \xi^2 + \eta^2 = 1\}$ 上では $X = +\infty$ から $-\infty$ 、 $\{\xi > 0, \xi^2 + \eta^2 < 1\}$ の領域で $X < 0$ であり、図-6に示した $\tan^{-1} X$ のグラフと対応させるため、ED区間で $\operatorname{Im} = \pi$ 、DB y_∞ 区間で $\operatorname{Im} = 0$ と選ぶ。このことより、暗きよ下端A $_L$ ($\xi=0, \eta=-\beta$) では、式(10)より $\theta_2 = C_2$ 、式(3)より $\theta_2 = 0$ 、したがつて $C_2 = 0$ である。また暗きよ上端A $_U$

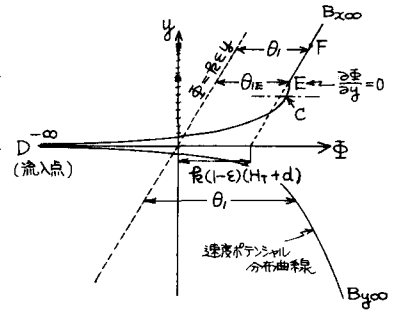


図-2. $B_{x\infty}$ E $B_{y\infty}$ 上の速度ポテンシャル

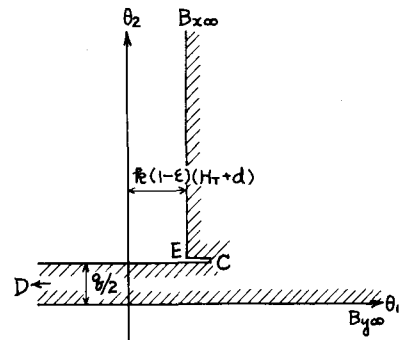


図-3 θ -平面



図-4 t -平面

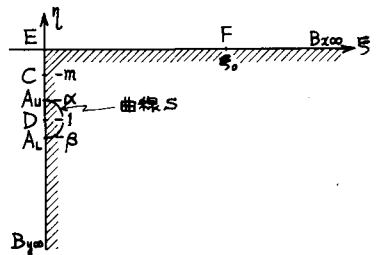


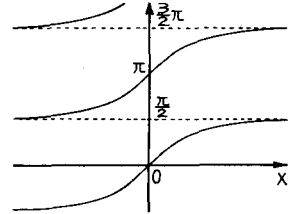
図-5 ξ -平面

($\xi=0, \eta=-\alpha$) では式-(10)より $\theta_2 = -(1-m^2) \cdot M_1 \pi$, 式-(3)より $\theta_2 = \theta/2$, $1 = \beta^2$ として

$M_1 = -\theta/2\pi(1-m^2)$ となる。これらの値を式-(9), (10)に代入し, さらに式-(9), (10)を式-(2), (3)に代入すると, 次式をうる。

$$\Phi = Re\epsilon y - \frac{\theta}{\pi(1-m^2)}\eta + \frac{\theta}{4\pi} \ln \frac{\xi^2 + (\eta+1)^2}{\xi^2 + (\eta-1)^2} + Re(1-\epsilon)(H_T+d) \quad (13)$$

$$\psi = -Re\epsilon x + \frac{\theta}{\pi(1-m^2)}\xi + \frac{\theta}{2\pi} \tan^{-1} \frac{2\xi}{\xi^2 + \eta^2 - 1} \quad (14)$$



5. 複素ポテンシャルの式.

さて, 図-5 は z -平面のハッチ

の部分と写像したもので, 流れは $B_{\infty} \sim B_{y\infty}$ から流入点 D に向っている。この図-5 に鏡像の原理を適用し, ξ 軸に南して D 点と対称な位置

に同じ強さの流入点を考えると, 図-5 のポテンシャル流は, 無限大領域に流入点が二つある場合のポテンシャル流であり, 複素ポテンシャルの式は次式で与えられる。

$$W = \Phi + i\psi = (\theta/2\pi) \ln (\zeta+i)(\zeta-i) + \mu \quad (15)$$

この式に $\zeta = \xi + i\eta$ を代入し, 実数部と虚数部にわけると,

$$\Phi = (\theta/4\pi) \cdot \ln \{ \xi^2 + (\eta-1)^2 \} \{ \xi^2 + (\eta+1)^2 \} + \mu_1 \quad (16)$$

$$\psi = \frac{\theta}{2\pi} \tan^{-1} \frac{2\xi\eta}{\xi^2 - \eta^2 + 1} + \mu_2 \quad (17)$$

いま E 点 ($\xi=\eta=0$) について考えると, 式-(16)より $\Phi = \mu_1$, 式-(1)より $\Phi = Re(1-\epsilon)(H_T+d) + Re\epsilon H_E$.

$$\therefore \mu_1 = Re(1-\epsilon)(H_T+d) + Re\epsilon H_E \quad (18)$$

また式-(17)より $\psi = \theta/2 + \mu_2$, 図-1より $\psi = \theta/2$ $\therefore \mu_2 = 0$ (19)

これら式-(18), (19)を式-(16), (17)に代入してえられる Φ, ψ は式-(13), (14)の Φ, ψ と同値であり,

ζ -平面を媒介として W -平面と z -平面と一対一に対応づけるとができる。1 次がって, z -平面, ζ -平面 および W -平面の各点の境界条件を与える = により, 物理量 $R, r, d, H_A, H_E, H_0, H_T$ および θ の関係式がえられる。

6. 淡塩境界面の形状と取水量との関係式.

A_U 点 式-(16) に $\xi=0, \eta=-\alpha$, $\Phi = Re H_A$ を代入し整理すると

$$Re\epsilon H_E = Re H_A - Re(1-\epsilon)(H_T+d) - (\theta/2\pi) \cdot \ln(1-\alpha^2) \quad (20)$$

また式-(13)に $y=r$ を代入すると, $\frac{\theta\alpha}{\pi(1-m^2)} = \frac{\theta}{2\pi} \ln \frac{1+\alpha}{1-\alpha} - Re\{(1-\epsilon)(H_T+d) - (H_A - \epsilon r)\}$ (21)

A_L 点 式-(13) に $\xi=0, \eta=-\beta$, $\Phi = Re H_A$, $y=-r$ を代入し整理すると,

$$\frac{\theta}{Re} = \frac{2\pi \{ (1-\epsilon)(H_T+d) - (H_A + \epsilon r) \} (1-m^2)}{(1-m^2) \ln \{ (\beta+1)/(\beta-1) \} - 2\beta} \quad (22)$$

また A_U 点と A_L 点は等ポテンシャルであることから, 式-(16)より $\beta^2 = 2 - \alpha^2$ (23)

F 点 : 淡塩境界面が暗きと取水前の淡塩境界面の高さに回復する位置 ($\xi = \xi_R, \eta = 0$)

$\Phi = Re H_0$ を式-(16)に代入すると,

$$\xi_R = \sqrt{e^{Re(H_0 - H_E) \cdot 2\pi/\theta} - 1} \quad (24)$$

式-(14) に $x=R$ を代入すると、

$$R\epsilon R = \frac{q}{\pi(1-m^2)} + \frac{q}{2\pi} \tan^{-1} \frac{2\epsilon R}{\epsilon_R^2 - 1} - \frac{q}{2} \quad (25)$$

以上の解析式より求めた q , H_E と m^2 を式-(13), (14), (16) および (17) に代入すれば淡水境界面の形状が求まる。なお、式-(16) は $\epsilon \rightarrow \infty$ では $\Phi \rightarrow \infty$ となって、式-(13) より $y \rightarrow \infty$ となり実際の淡水境界面と矛盾を生ずる。したがって $x > R$ の領域には以上の解析式は適用できず、ここでは井戸の理論と同様に、 $x > R$ の範囲の淡水境界面は $y = H_0$ の一定値をもつものとして取扱う。

7. 数値解析

いま $r/d = 0.01$, $H_0/d = 0.8$, $H_r/d = 0.2$ の場合の算定結果を図-7 に示す。ここには $\Delta H/d = (H_r + d - H_A)/d = 0.035 \sim 0.10$ であり、AA' 線に沿った数値は各 $\Delta H/d$ の値のときに取りうる H_E/d (淡水境界最近点の高さ) の最小値を示すものであり、 H_E/d がこの値より小さくなると上部の淡水が暗きよ内に吸い込まれることになる。この値は $\Delta H/d$ を大きくするほど大きくなっており、 $\Delta H/d$ が大きいほど淡水を吸い込みやすいことがわかる。次に図-8 に各 $\Delta H/d$

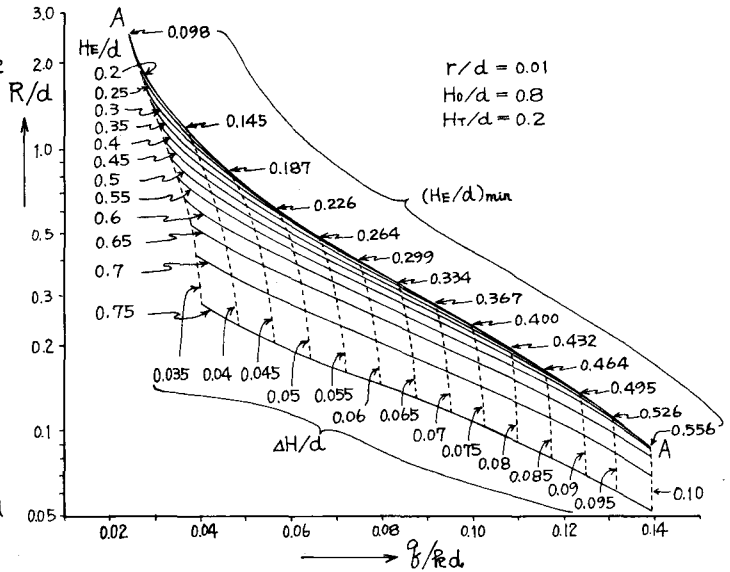


図-7 算定結果

において取りうる H_E/d と q/Rd の最小値および R/d の最大値を示している。この図より $\Delta H/d$ が一定の場合の $H_r/d = 0$ と 0.2 および $r/d = 0.01$ と 0.1 の値を比較すれば、湛水深が大きいほどあるいは暗きよ径が小さいほど境界面が低下する範囲 R/d が大きく、境界面の最低点の高さ H_E/d が低いことがわかる。以上の解析結果より、淡水境界面を広い範囲に、十分な深さまで低下させるには、暗きよ径を小さくするが暗きよ埋設深さを大きくし、湛水面を高くしておいてできるだけ小さな水頭差で涵水と取水したほうが良いことになる。

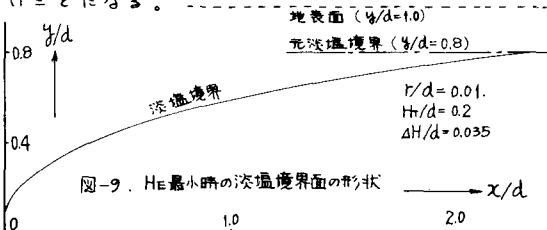


図-9 H_E 最小時の淡水境界面の形状

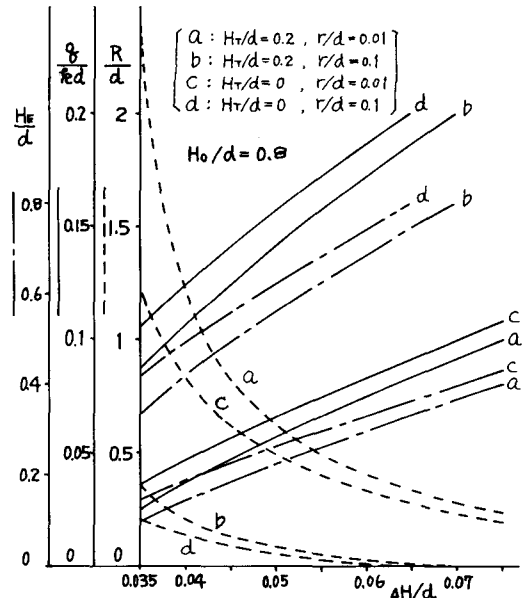


図-8 H_E 最小時 ($m=0$) の算定結果