II-156 地下水流の浸透機構について（最終報）

大阪府立工高専　正会員　佐藤邦明

1　まえがき

第一報から四報にわたって浸透機構について基礎的にのべた。まず、一二報で多孔体の特性を人工多孔体によって実験的に把握し、流れの抵抗則を流体力学的立場から論じると同時に、多孔体特性値と抵抗則の表現の関連を明らかにした。つぎに、三四報において多孔体の粒径分布特性と見掛け流速、横方向流速成分の実験的関係を示し、また微速浸透流にも注目して微粒土中の流れにおける水分子の吸着作用とその流れに及ぼす影響を理論的に取扱った。

本報ではこれらの研究結果を集約して微速浸透流、ダルシー流、遷移流、高速浸透流の個々の流れについて抵抗則、その表現、さらに浸透機構を述べる。

2　抵抗則の表現

従来、抵抗の表現として Darcy則、Dupuit-Forchheimer 則が最もよく知られている。これら抵抗則に含まれる定数の物理的意味を理論的に明示する。

図-1を参照して、まず直交座標系にボリューム dV、長さ dS、断面積 dA、空隙率 λ の多孔体要素を想定し、そこに働く圧力差 dP、空隙中の真の流速 $\overset{*}{q}$、その x, y, z 方向成分をそれぞれ $\overset{*}{u}, \overset{*}{v}, \overset{*}{w}$、さらに見掛けの流速 q とする。終局的に、抵抗則の確立は空隙内の流れによるエネルギー散逸とレイノルズ応力による仕事を見掛けの流速によって評価することに帰結する。

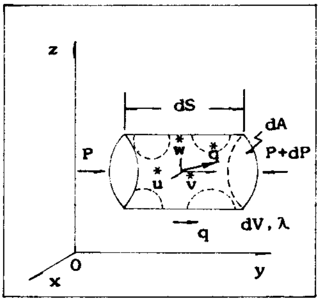

図-1　多孔体要素

そこで、定常浸透流において単位体積、単位時間に外部からの仕事 $\overset{*}{W}_0$、平均流によるエネルギー散逸 $\overset{*}{E}$、レイノルズ応力による仕事 $\overset{*}{W}$ とし、$\overset{*}{u} = \bar{\overset{*}{u}} + \overset{*}{u}'$, $\overset{*}{v} = \bar{\overset{*}{v}} + \overset{*}{v}'$, $\overset{*}{w} = \bar{\overset{*}{w}} + \overset{*}{w}'$ （－；時間平均、′；乱れ成分）とする。そうすれば、

$$\overset{*}{W}_0 = \overset{*}{E} + \overset{*}{W} \qquad (1)$$

となり、$\overset{*}{E}$, $\overset{*}{W}$ はそれぞれ

$$\overset{*}{E} = \mu\left\{2\left(\frac{\partial\bar{\overset{*}{u}}}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial\bar{\overset{*}{v}}}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial\bar{\overset{*}{w}}}{\partial z}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial\bar{\overset{*}{w}}}{\partial y} + \frac{\partial\bar{\overset{*}{v}}}{\partial z}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial\bar{\overset{*}{u}}}{\partial z} + \frac{\partial\bar{\overset{*}{w}}}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial\bar{\overset{*}{v}}}{\partial x} + \frac{\partial\bar{\overset{*}{u}}}{\partial y}\right)^2\right\} \qquad (2),$$

$$\overset{*}{W} = \rho\left\{\overline{\overset{*}{u}'\overset{*}{u}'}\left(\frac{\partial\bar{\overset{*}{u}}}{\partial x}\right) + \overline{\overset{*}{v}'\overset{*}{v}'}\left(\frac{\partial\bar{\overset{*}{v}}}{\partial y}\right) + \overline{\overset{*}{w}'\overset{*}{w}'}\left(\frac{\partial\bar{\overset{*}{w}}}{\partial z}\right) + \overline{\overset{*}{v}'\overset{*}{w}'}\left(\frac{\partial\bar{\overset{*}{w}}}{\partial y} + \frac{\partial\bar{\overset{*}{v}}}{\partial z}\right) + \overline{\overset{*}{w}'\overset{*}{u}'}\left(\frac{\partial\bar{\overset{*}{u}}}{\partial z} + \frac{\partial\bar{\overset{*}{w}}}{\partial x}\right) + \overline{\overset{*}{u}'\overset{*}{v}'}\left(\frac{\partial\bar{\overset{*}{v}}}{\partial x} + \frac{\partial\bar{\overset{*}{u}}}{\partial y}\right)\right\} \qquad (3).$$

ここで、μ；粘性係数、ρ；密度である。

いま、無次元量 $x' = x/l$, $y' = y/l$, $z' = z/l$, $\bar{u} = \bar{\overset{*}{u}}/q$, $\bar{v} = \bar{\overset{*}{v}}/q$, $\bar{w} = \bar{\overset{*}{w}}/q$, $u' = \overset{*}{u}'/q$, $v' = \overset{*}{v}'/q$, $w' = \overset{*}{w}'/q$ を導入する。（l；多孔体に関する代表的な長さである）

つぎに、式(2), (3) にこれら無次元量を代入し次元変換すれば、

$$\overset{*}{E} = \mu \frac{q^2}{\ell^2}\cdot E \qquad (4), \qquad \overset{*}{W} = \rho \frac{q^3}{\ell}\cdot W \qquad (5)$$

となり、E, W はそれぞれ

$$E = \left\{ 2\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x'}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y'}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial z'}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y'} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z'}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z'} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x'}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x'} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y'}\right)^2 \right\} \qquad (6),$$

$$W = \left\{ \overline{u'u'}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x'}\right) + \overline{v'v'}\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y'}\right) + \overline{w'w'}\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial z'}\right) + \overline{v'w'}\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y'} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z'}\right) + \overline{w'u'}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z'} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x'}\right) + \overline{u'v'}\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x'} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y'}\right) \right\} \qquad (7).$$

さらに、$\overset{*}{W}$, $\overset{*}{E}$ を多孔体内の流体ボリューム $dV\lambda$ について積分すると、全エネルギー散逸 $\overset{*}{E}_T$、全レイノルズ応力仕事 $\overset{*}{W}_T$ はそれぞれ

$$\overset{*}{E}_T = \int_{(dV\lambda)} \overset{*}{E}\, d(dV\lambda) = \mu \frac{q^2}{\ell^2} dV\lambda\cdot\alpha \qquad (8), \qquad \overset{*}{W}_T = \int_{(dV\lambda)} \overset{*}{W}\, d(dV\lambda) = \rho \frac{q^3}{\ell} dV\lambda\cdot\beta \qquad (9),$$

$$\alpha = \frac{1}{dV\lambda}\int_{(dV\lambda)} E\, d(dV\lambda), \qquad \beta = \frac{1}{dV\lambda}\int_{(dV\lambda)} W\, d(dV\lambda) \qquad (10)$$

と書くことができる。ここで、式(10) の α、β は空隙の空間的要因、流れの空間構造に関係する無次元量である。最後に、$\overset{*}{E}_T$, $\overset{*}{W}_T$ を多孔体ボリューム dV で平均すると

$$\overline{\overset{*}{E}}_T = \frac{\overset{*}{E}_T}{dV} = \mu \frac{q^2}{C_1 \ell^2} \quad (11), \qquad \overline{\overset{*}{W}}_T = \frac{\overset{*}{W}_T}{dV} = \rho \frac{q^3}{C_2 \ell} \quad (12), \qquad C_1 = \frac{1}{\alpha\lambda}, \quad C_2 = \frac{1}{\beta\lambda} \quad (13).$$

他方、断面 dA の多孔体中で見掛けの流速によって単位時間になされる仕事は $q\,dA\,dp$ であるから、$q\,dA\,dp = (\overline{\overset{*}{E}}_T + \overline{\overset{*}{W}}_T)\,dA\,ds$ が成立しなければならない。したがって、式(11), (12) から

$$i = aq + bq^2 \quad (14), \qquad i = \frac{1}{\gamma}\frac{dp}{ds}, \quad a = \frac{\mu}{C_1 \gamma \ell^2}, \quad b = \frac{\rho}{C_2 \gamma \ell} \quad (15)$$

となる。ここで、γ は水の単位体積重量、i は動水こう配である。

式(14) は Dupuit-Forchheimer 則であり、そこに含まれる定数 a, b の物理的意味はただちにわかる。

また、この式(14) の表現は抵抗係数ζ、レイノルズ数 Re の実測関係 $\zeta Re = A + B\,Re$ (A, B; 実験定数) に $\zeta = 2g\ell i/q^2$, $Re = q\ell/\nu$ (ν; 動粘性係数, g; 重力の加速度) を代入しても得られる。無論、式(14) は次元解析によっても導入できる。いうまでもないが、Darcy 則は式(14) の特殊ケース(つまり、第二項が零)であるから、Dupuit-Forchheimer 則は機構的にダルシー流、遷移流、高速浸透流を同時に与えていることになる。

つづいて微速浸透流の場合の抵抗則、その表現、機構を考える。

通常、粘土、シルトのごとき微粒土中の浸透実験では式(14) をまったく満足しない実測結果が得られている。図-2の(b)の q〜i 関係に注目すれば、$i < i_a$ においてこのことが観取される(図中、●印は流れの機構的不連続を示す)。つまり、q〜i 関係は $i < i_a$ で非線形的に変化し、$i_0 < i$ でなければ、流れはおこらない。この実測事実は浸透流がレオロジー的特性をもち、流れが単純な層流抵抗則に従わないことを意味している。さらに、$i_a < i < i_c$ において流れは層流抵抗則に支配されるが、図中の点線と実線に差違が認められ、これは流れ中に何らかの付加粘性が存在すると考えなければな

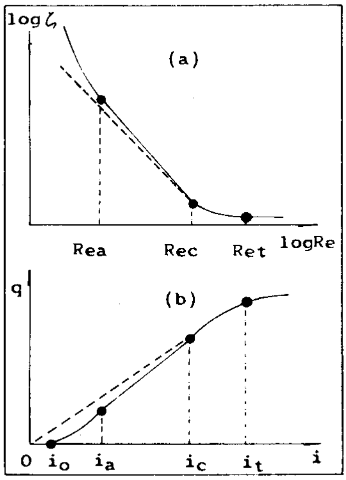

図-2 $q \sim i$ 関係と $\zeta \sim Re$ 関係

らない。こういった微速浸透流の特異性は基本的に微粒土表面と水分子との相互作用に起因する、いわゆる吸着現象によって説明される。

抵抗則の表現は $i_0 < i < i_a$, $i_a < i < i_c$ の場合にそれぞれ、

$$q = \frac{1}{a} i \left[1 - \frac{4}{3}\left(\frac{i_0}{i}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{i_0}{i}\right)^4 \right] \qquad (16),$$

$$q = a' i \qquad (17), \qquad a' = \frac{C_1 \gamma \ell^2}{\mu_a} \qquad (18).$$

ここで、式(16)は細円管中のビンガム流動（栓流）に類似して得られるものであり、また、式(18)中の μ_a は吸着粘性係数であり、$\mu_a = K\mu$ （$K \geqq 1$、吸着係数）と書ける。

なお、図-2の(a)は抵抗係数とレイノルズ数の関係を与えるもので、機構的に(b)の i_a, i_c, i_t に対応する Re_a, Re_c, Re_t が存在する。

3　多孔体と C_1, C_2, ℓ の関係

上述したごとく、抵抗の一般的表現は明らかになったが、当面最も重要な事柄は式(15)に含まれている多孔体と流れの構造に関する代表的長さ ℓ, 定数 C_1, C_2 の決定である。

従来、浸透流の抵抗の表現に関する多くの研究はこれら ℓ, C_1, C_2 について、まず $\ell = \bar{d}$（平均粒径）、つぎに C_1, C_2 はともに空隙率の関数であるという前提に立っている。しかし、第二報でのべたように、ℓ は本質的に空隙規模に関与すべき量であって、便宜的に平均粒径で代用しているにすぎない。そこで、多孔体構成粒子径 d、空隙規模 $\overset{*}{d}$ とすれば、それぞれの分布、粒径分布 $P(d)$, 空隙規模分布 $P(\overset{*}{d})$ を用いて

$$\bar{d} = \int_0^\infty P(d) \cdot d \, dd \, , \qquad \bar{\overset{*}{d}} = \int_0^\infty P(\overset{*}{d}) \cdot \overset{*}{d} \, d\overset{*}{d} \qquad (19), \qquad \bar{\overset{*}{d}} = \xi \bar{d} \qquad (20)$$

から、平均粒径 $\bar{d}$ と平均空隙規模 $\bar{\overset{*}{d}}$ の相互変換定数 ξ を実験的に決定し、$\ell = \bar{\overset{*}{d}}$ とするのが妥当であり、かつ実際的である。一連の研究から、$P(d)$ を対数正規分布としたとき、$P(\overset{*}{d})$ は正規分布になることが判明し、ξ はそれぞれの分布の標準偏差に依存するが、ほぼ 0.3～0.7 程度になることがわかった。つまり、ξ は多孔体の空隙率に等しいと考え、$\xi = \lambda$ としても大過ないことになる。

つぎに、粒径分布の特性値（標準偏差 σ, 平均粒径 $\bar{d}$）と空隙率 λ の関係は $\sigma / \bar{d} = R e^{-r\lambda}$ であった。ここに、R、r は粒子形状、充填条件によって決まる定数である。この実験式によれば、平均粒径が一定でも、分布の標準偏差が大きくなれば、空隙率は指数関数的に小さくなる。大粒径の構成する空隙中を順次小粒子が満たすという充填形態である。

しかし、以上でのべた ξ の概念、空隙率の実験式は多孔体構成粒子径が極微粒になれば、必ずしも成立しない。その理由は微粒子自体の重量が小さくなるに反し、微粒子間相互の摩擦力が著しく増大すると同時に、粒子間に電気的作用も働き、空隙率が粒径分布に無関係に大きくなる傾向がある。これは微粒体充填に見られる独特の現象である。

定数 C_1, C_2 と多孔体特性との関連について考える。

式(13)からも明らかなように、C_1, C_2 は基本的に空隙率λに逆比例する表現になっている。しかしながら、多孔体空隙の空間構造、流れの空間構造に関する無次元量α、β が関与しているから、単に空隙率の関数であるとは断定できない。第三報でのべたように、空隙率が同一の多孔体内の流れでも平均流速が増大することによって、流況は違い、流れの空間構造は違っている。この事を定量的に把握するための足掛かりとして、数種の多孔体を用いてトレーサー注入により平均流速と横方向流速との実験的関係を推定した。その結果、$(\bar{v}\cdot\bar{d}/\nu) = C(\bar{u}\bar{d}/\nu)^n$ なる相関を得た。ここで、$\bar{v}$；横方向平均流速、ν；動粘性係数、C；定数、n；指数である。この実験式から、流れの空間構造はレイノルズ数によって支配されることがわかる。

微速浸透流においては吸着効果が存在するから、最小空隙の概念を導入し、C_1 を論じなければならない。

この地下水流の浸透機構に関する一連の研究では定数 C_1, C_2 の恒久的結論を提示することができなかったが、今後は多孔体の構造と流れの構造を一体化して究明しなければなるまい。

4 結語

地下水流を対象に浸透機構を考えたわけであるが、従来、こういった研究は比較的透水係数の大きい流れについて行なわれてきた。その理由は Darcy 則、Dupuit-Forchheimer 則の確立の背景から推測できるように、ろ過、揚水といった浸透流を前提に現象を捉えてきたからである。しかし、実際に地下水流に立脚して浸透流を取扱う場合は難透水性の認識もあわせもたなければならない。地下水問題を論じるに当ってこのことは極めて重要である。

最後に、本研究に当たり、大阪大学工学部の室田教授から終始、示唆、指導を賜わったことに深甚の謝意を表わしたい。