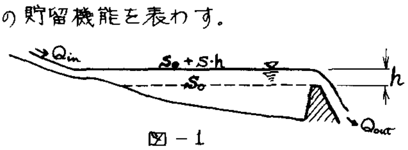
II-144 貯水池調節機能の検討

東京工業大学　正会員　吉川秀夫
○東京工業大学　正会員　四俵正俊

I　はじめに　水文学における手法のふたつの大きな流れ―ブラックボックス的手法と水理学的手法―のうち、講演者らは現在、後の方法を用い、かつできる限り解析的に流出系を取扱うことをひとつの目標にしている。ここではその手始めとして貯水池の調節機能を単純な数学的モデルで表わし検討を加える。モデル自体は目新しいものではなく、また数値計算を行なえばこれを解くことは全く単純な問題にすぎないが、われわれの目的は個々の解を求めることではなくて系の性質を大局的に知ることである。なおここで用いた方法は貯留関数法を単純化したものと考えられ、発展させることによって一般の流出解析にも使用できることが期待される。

II　数学的モデルの設定　次の常微分方程式で貯水池の貯留機能を表わす。

(1)　$\{S_o + S\cdot h(t)\}\frac{dh(t)}{dt} + C\cdot h^{\alpha}(t) = Q_{in}(t)$



図－1

ただし $h(t)$；越流堤頂から湛水面までの高さ

$Q_{in}(t)$；貯水池への流入量

S_o　；$h=0$ のときの湛水面積　　α；越流べき係数

S　；h が1増す毎の湛水面積の増し高　　C；越流係数　（越流量 $Q_{out} = C\cdot h^{\alpha}$）

図－1を参照のこと。　モデル化に際しての主な仮定は、①貯水池内の流れによる時間おくれは無視する。②与えられた流入および越流による流出以外に水の出入りはない。③越流は自由越流とし、越流量は h^{α} に比例する。④湛水面積は h の一次関数とする。⑤ h，$Q \geq 0$．

III　方程式の線形化および周波数応答の計算　入力としてまず定常流に変動が加わったものを考える。つまり定常的状態から入力に変動を加えたとき、出力がどのように変動するかを知ろうとするのである。線形系については、入出力の関係を周波数応答、インディシャル応答、インパルス応答のいずれで表わしても結局同じであるが、方程式(1)は非線形であるのでこれを線形で近似し、使い易さを考慮してその周波数応答を求めることとした。したがって入力変動は正弦波で与える

(2)　$Q_{in}(t) = Q_o + A_Q \sin\omega t \equiv Q_o + Q^{*}(t)$

(1)式を線形化すると次の形になる

(3)　$a\cdot\frac{dh(t)}{dt} + b\cdot h(t) = Q_{in}(t)$

線形方程式(3)は(2)の形の入力に対して次のような定常的な出力を与える

(4)　$h(t) = h_o + A_h \sin(\omega t - \varphi) \equiv h_o + h^{*}(t)$

ω に対する A_h/A_Q および φ の関係が周波数応答である。　さて周波数応答を求めるためには(1)式を線形化して(3)式の形にしなければならないが、それには次のように考える。(1)式の左辺の各項は(4)式で与えられる $h(t)$ に対して周期 $2\pi/\omega$ の周期関数となるが、ふたつの項 $S\cdot h\cdot\frac{dh}{dt}$ および $C\cdot h^{\alpha}$ はその非線形性のゆえに高調波を含む。すなわちフーリエ級数で表わして

$$N(h, dh/dt) \equiv S\cdot h\cdot\frac{dh}{dt} + C\cdot h^{\alpha} = a_o + a_1\cos\omega t + a_2\cos 2\omega t + \cdots\cdots + b_1\sin\omega t + b_2\sin 2\omega t + \cdots\cdots$$

項が線形ならば(4)式で与えられる $h(t)$ に対して $a_0 + a_1\cos\omega t + b_1\sin\omega t$ となるから N を

$$N(h,\ dh/dt) \simeq a_0 + b_1\sin\omega t + a_1\cos\omega t \equiv n_0 + n_1\cdot A_h\sin\omega t + n_2\cdot A_h\cdot\omega\cos\omega t = n_0 + n_1\cdot h^* + n_2\frac{dh^*}{dt}$$

と線形化する。ここに $n_0,\ n_1,\ n_2$ は次のようにして求める。

$$n_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(h_0 + A_h\sin\phi,\ A_h\cdot\omega\cos\phi)\,d\phi = C\cdot h_0^{\alpha}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{A_h}{h_0}\sin\phi\right)^{\alpha} d\phi \equiv C\cdot h_0^{\alpha}\cdot F_\alpha\left(\frac{A_h}{h_0}\right)$$

$$n_1 = \frac{1}{\pi\cdot A_h}\int_0^{2\pi} N(h_0 + A_h\sin\phi,\ A_h\cdot\omega\cdot\cos\phi)\sin\phi\,d\phi = C\cdot h_0^{\alpha-1}\cdot\frac{1}{\pi\cdot(A_h/h_0)}\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{A_h}{h_0}\sin\phi\right)^{\alpha}\sin\phi\,d\phi \equiv C\cdot h_0^{\alpha-1}\cdot G_\alpha\left(\frac{A_h}{h_0}\right)$$

$$n_2 = \frac{1}{\pi\cdot A_h\cdot\omega}\int_0^{2\pi} N(h_0 + A_h\sin\phi,\ A_h\cdot\omega\cdot\cos\phi)\cos\phi\,d\phi = S\cdot h_0$$

これを用いると方程式(1)は

$$\begin{cases} n_0 = Q_0 & (5) \\ (S_0+n_2)\dfrac{dh^*}{dt} + n_1\cdot h^* = Q^* & (6) \end{cases}$$

とふたつに分けることができて、線形方程式(6)の周波数応答を求めればよい。これはよく知られているように時定数 $T_0 = (S_0+n_2)/n_1$ を導入して

$$\mu(T) = \frac{1}{n_1}\cdot\frac{T/2\pi T_0}{\sqrt{1+(T/2\pi T_0)^2}}$$

$$\varphi(T) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{T/2\pi T_0}\right)$$

ただし、$\mu(T)$；振巾倍率(A_h/A_0)　$\varphi(T)$；位相おくれ

T　；入力周期$(2\pi/\omega)$

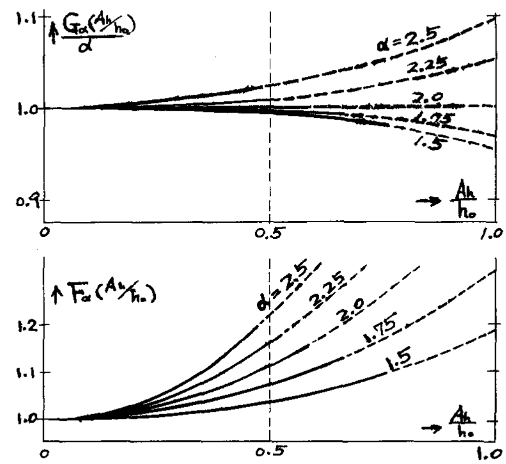


図-2

ところで方程式(6)の係数は平均水位 h_0 および水位変動振巾 A_h の関数として与えられるが、これを求めるために $G_\alpha(\frac{A_h}{h_0})$ および $F_\alpha(\frac{A_h}{h_0})$ を数値積分によって求めた。その値を図-2に示す。　ところで $A_0/Q_0 \leq 1$　$(Q_0 \geq 0)$ の条件を変形すると

$$\frac{1}{Q_0}\cdot\frac{h_0}{\mu}\cdot\frac{A_h}{h_0} \leq 1 \quad さらに \quad \frac{A_h}{h_0} \leq Q_0\cdot\frac{\mu}{h_0} = n_0\cdot\frac{1}{h_0}\cdot\frac{1}{n_1}\cdot\frac{T/2\pi T_0}{\sqrt{1+(T/2\pi T_0)^2}} = \frac{F_\alpha(\frac{A_h}{h_0})}{G_\alpha(\frac{A_h}{h_0})}\cdot\frac{T/2\pi T_0}{\sqrt{1+(T/2\pi T_0)^2}} \leq \frac{F_\alpha(\frac{A_h}{h_0})}{G_\alpha(\frac{A_h}{h_0})}$$

となり図-2によって A_h/h_0 がとり得る値の範囲を求めることができる。図-2中の実線がそれである。実線の範囲内では　$G_\alpha(\frac{A_h}{h_0}) \simeq \alpha$，$F_\alpha(\frac{A_h}{h_0}) \simeq 1 + 0.04\alpha$（あるいはさらに $\simeq 1$）で近似して誤差を1割以内に押えることができる。これを用いると

$$\mu(T) = \frac{1}{C\cdot\alpha\cdot h_0^{\alpha-1}}\cdot\frac{T/2\pi T_0}{\sqrt{1+(T/2\pi T_0)^2}}$$

$$T_0 = \frac{S_0 + S\cdot h_0}{C\cdot\alpha\cdot h_0^{\alpha-1}}, \quad h_0 = \frac{1}{1.04}\sqrt[\alpha]{\frac{Q_0}{C}} \ \text{or}\ \sqrt[\alpha]{\frac{Q_0}{C}}$$

したがって平均水位だけを設定すれば系の周波数応答が求まる。図-3にそれを示す。

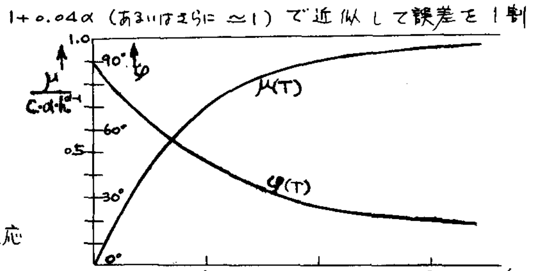


図-3

IV むすび

簡単な計算によって貯水池の(周波数)特性を求めることができた。これによって、これまで常識として定性的に知られていた事柄を定量的に裏付けることができる。またこの結果をより一般的な入力に対して適用することを検討中であり、ダムの計画、設計、操作等に利用できる見通しである。　なお本研究は文部省科学研究費の援助を得たことを付記する。