

京都大学防災研究所 正員 石原 安雄

同 上 正員 O 友杉 邦雄

1. まえがき 洪水ハイドログラフの主要部を決定するような比較的短期間の雨量のその期間内の時間配分の状況(いわば無次元化されたハイトグラフの形状)に関する統計則は、中小流域の治水計画、ダムの余水吐計画等に際して合理的な判断の規準を与えるものとなるばかりではなく、現実の洪水調節においても、それによってハイトグラフの確率的予測の可能性がでてくるため、その合理化と最適化に寄与するものと考えられる。ここでは、手始めとして、雨量の時間配分過程を pure-random と仮定することにより確率論的に得られた最大配分率(ハイトグラフのピーク値が総雨量に対して占める比率)等の順位づけられた配分率の確率分布を示し、その期待値等を明らかにするとともに、実測資料による理論の検証等を行ない、仮定の成立する範囲等について考察する。なお、最大配分率については同じ仮定に基づく石原・角屋¹⁾の研究があるが、厳密解は完全には得られていない。

2. 雨量の時間配分とそのモデル化 流域は高周波り波の機能をもつため、洪水ハイドログラフ(またはピーク流量)の予測に必要なハイトグラフの単位時間は一般にあまり短かくとも必要がないことは周知のとおりである。すなわち、流域面積等の流出特性によって定まる適当な時間単位ごとの平均降雨強度の時間変化を知れば十分であり、その時間単位は経験的に、小は10分程度から大は2時間程度がとられている。この程度の時間単位のハイトグラフのことに主降雨の部分を観察してみると、周期性らしきものも若干みられることもあるが、ほとんどの場合無秩序といってよいような変動状況を示していることがわかる(瞬間的な強度変化では顕著な周期性がみられる場合もあることが知られている²⁾)。そして、こうした変動状況は降雨現象の複雑さのために予測できないのが現状であるため、確率・統計的な取扱いをせざるを得ない。それで、ここでは、その確率論的な取扱いの容易性をも考慮して、降雨の時間配分過程を全く無秩序(pure-random)であると仮定したわけである。

降雨の時間配分の問題、すなわちある期間の雨量 r が与えられたとき、その期間の n 等分に当る n 個の単位時間の系列それぞれに配分される雨量 r_j ($j=1, 2, \dots, n$)の系列がどのようなになるかの問題は、雨量を離散変数と考えることによってつぎのようなボールと箱の問題にすりかえられる。すなわち、雨量をボールの個数(1個は雨量の最小単位)、 n 個の単位時間を時間の流れを示す順番という区別のついた箱と考えれば、総数 r 個の区別のないボールを区別のつく n 個の箱に配分する問題と考えることができる。ここで、雨量の最小単位をどうとるかは自由であり、たとえば10mmの雨量は、最小単位を0.5mmとすれば20個のボール、0.1mmとすれば100個のボールを意味する。

上記のモデルにおいて、 r 個のボールを n 個の箱に配分する方法の区別のつく総数、すなわち、

$$\sum_{j=1}^n r_j = r \quad (r_j \geq 0) \quad \text{----- (1) の異なる解の数 } A(n, r) \text{ は、成書に示されているように、}$$

$A(n, r) = \binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1}$ ----- (2) で与えられ、先の仮定により、これらの個々の配分方法は等確率 $A(n, r)^{-1}$ で起こることになる。このような配分方法の集合を基礎として、降雨の時間配分に関する一つの興味ある統計的性質として、 i 番目($i=1, 2, \dots, n$)に大きい配分値が総雨量に対して

占める比率(順位配分率と称する)の確率分布を理論的に得たので、つぎにその概略を示す。

3. 順位配分率の確率分布 まず、最も興味のある最大配分率($i=1$)の確率分布を示す。これは $r_1, r_2, \dots, r_n$ のうちの最大値(最大配分値)の確率分布をまず求め、その極限形式として得たものである。

最大配分値を R とすると、 R の値域によって R がある特定の数になる部分集合の元素の数の勘定の仕方が異なることに注意した結果 $R = R_s$ ($[R/(s+1)] < R_s \leq [R/s]$; ガウス記号, $s=1, 2, \dots, n-1$, $R_n = R/n$)となる確率 $P(R=R_s)$ は組合せ、場所占めの理論を応用することにより、次式で与えられることがわかった。

$$P(R=R_s) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^i (-1)^{i+j} A(n-i, R-j-R_s) \binom{n}{j} / A(n, R) \quad \text{----- (3)}$$

また、これから R が R_s 以上になる確率 $P(R \geq R_s)$ はつぎのようになる。

$$P(R \geq R_s) = \sum_{j=1}^s (-1)^{j+1} A(n, R-j-R_s) \binom{n}{j} / A(n, R) \quad \text{----- (4)}$$

実際に与えられる雨量としての R はいろいろな値をとるから、最大配分率 R_n の確率分布を求めておく方が実用的である。 R_n は離散変数であるが、 R が無限に大きい数なら連続変数とみなし得る。実際、雨量の最小単位はいくらでも小さくとれるから R は無限に大きい数とみなせる。そこで、 $R_n = x$ とおき、(4)式の $R \rightarrow \infty$ における極限をとることにより、 x の非超過確率 $F_n(x)$ として次式を得る。

$$F_n(x) = 1 - \sum_{j=1}^S (-1)^{j+1} \binom{n}{j} (1-jx)^{n-1} \quad (1 \geq x \geq 1/n) \quad \text{----- (5)}$$

ここに、 S は $1/x$ 以下の最大の整数で、最大 $n-1$ まで可能である。

(5)式を x で微分することにより、 x の確率密度関数 $f_n(x)$ として、

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^S (-1)^{j+1} j(n-1) \binom{n}{j} (1-jx)^{n-2} \quad (1 \geq x \geq 1/n) \quad \text{----- (6)}$$

を得る。図-1、図-2はそれぞれ $F_n(x)$ 、 $f_n(x)$ を $n=2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$ の場合についてグラフで例示したものである。

つぎに、 $i \geq 2$ の場合であるが、この場合は(3)式、(4)式のような離散的な式を求めるのは最小配分値($i=n$)の場合を除いて非常にむづかしいため、 i 番目に大きい配分率 x の確率密度 $f_n(x)$ は $i=1$ の(6)式と、 $i=n$ の式 $n f_n(x) = n(n-1)(1-nx)^{n-2}$ 、および任意の一つの分割期間への配分率 x の確率密度が $n(n-1)(1-x)^{n-2}$ であることを考慮して、 $f_n(x)$ が0となる境界条件、および $f_n(x)$ の全積分が1となる条件を満たすように未定常数を決定することにより、 $n=3, 4, \dots$ の場合について求め、その結果を演繹することによりつぎのように与えられることがわかった。

$$f_n(x) = \sum_{j=i}^S (-1)^{j+i} j(n-1) \binom{n}{j} \binom{j-1}{i-1} (1-jx)^{n-2} \quad (1/i \geq x \geq 0) \quad \text{----- (7)}$$

ここに、 $i=2, 3, \dots, n$ であり、 S は $1/x$ 以下の最大の整数で、各 i に対して最大 n まで可能である。これから、非超過確率 $F_n(x)$ として、 $F_n(x) = 1 - \sum_{j=i}^S (-1)^{j+i} \binom{n}{j} \binom{j-1}{i-1} (1-jx)^{n-1} \quad (1/i \geq x \geq 0) \quad \text{----- (8)}$ 得られる。図-3は $n=6$ の場合の順位配分率($i=1 \sim 6$)の確率密度分布を示したものである。

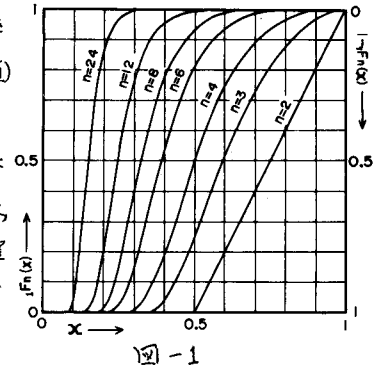


図-1

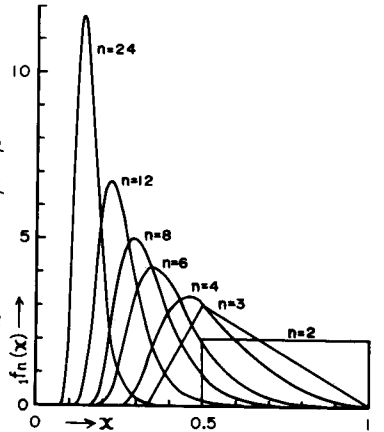


図-2

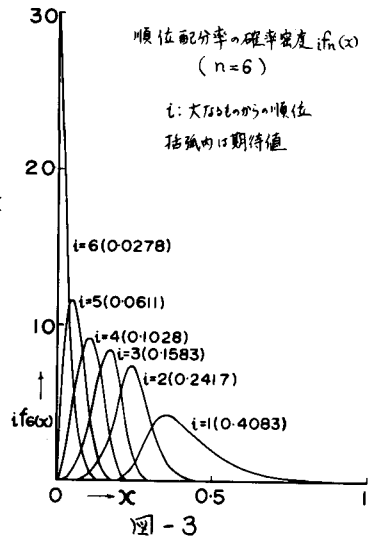


図-3

上記の(6)式, (8)式から各順位*i*の配分率の期待値, 分散等が求められる。まず, 期待値 $iE_n(x)$ は,

$$\begin{aligned} iE_n(x) &= \sum_{j=i}^{n-1} (-1)^{j+i} \binom{n}{j} \left(j+1 - \frac{j}{n} \right) \left(1 - \frac{j}{n} \right)^{n-1} / (nj) \quad (\text{for } i=1) \\ &= \sum_{j=i}^n (-1)^{j+i} \binom{n}{j} \left(\frac{j-1}{i-1} \right) / (nj) \quad (\text{for } i \geq 2) \end{aligned} \quad \text{---(9)}$$

であり, 分散を求めるための x^2 の期待値 $iE_n(x^2)$ は,

$$\begin{aligned} iE_n(x^2) &= \sum_{j=i}^{n-1} (-1)^{j+i} \binom{n}{j} \left\{ n(n-1) \left(\frac{j}{n} \right)^2 + 2(n-1) \frac{j}{n} + 2 \right\} \left(1 - \frac{j}{n} \right)^{n-1} \quad (\text{for } i=1) \\ &= \sum_{j=i}^n (-1)^{j+i} \binom{n}{j} \frac{2 \binom{n}{j} \left(\frac{j-1}{i-1} \right)}{n(n+1) \cdot j^2} \quad (\text{for } i \geq 2) \end{aligned} \quad \text{---(10)}$$

となる。図-4は*i*=1の場合の期待値, median, modeおよび $iE_n(x) \pm \sigma_n$ を $n=2 \sim 25$ について示したものである。ここに, median, mode は数値計算より求めたものであり, σ_n は標準偏差である。また, 図-5は $iE_n(x)$ を $n=1 \sim 30$ に対して各*i*について示したものである。

以上に得た順位配分率の期待値を用いてハイレグラフの期待値的なものを得ることが考えられるが, その時間的配列法は*n!*通りあり, いずれをとるかは残された問題である。

4. 理論の検証と考察 理論の検証のための実測資料としては, 1地点では数多く得難いことと, 同一の降雨原因でも地点間がある程度離れているとハイレグラフの形状が全く異なることが多いことに着目して, つぎのようなものを用いた。それは, 木曽川水系・今渡より上流の流域(約4000 km²)内に散在する約100ヶ所の時間雨量観測所による,

つぎの三つの一連降雨, すなわち ㊸昭和28年7月17日~21日の梅雨前線によるもの, ㊹昭和34年9月25日~27日の伊勢湾台風によるもの, および ㊺昭和35年8月11日~14日の台風11-12号と不連続線によるものの記録から, 12時間と24時間の連続記録をできるだけ多く選びだし, それぞれについて観測地点の区別を無視して1つの標本集合としたものを解析の対象としたわけである。

図-6は㊸の場合の94個の24時間降雨について, 総雨量 R_{24} と, 1時間最大雨量 R_{12m} の R_{24} に対して定める比率 ($i=1, n=24$ の x に当り, 黒丸印), および24時間の前半, 後半の12時間雨量の大きい方 R'_{12m} の R_{24} に対して定める比率 ($i=1, n=2$ の x に当り, 白丸印) との関係を示したものであり, R_{24} の大きさに無関係なことがわかる。同様に,

図-7は㊸, ㊹および㊺の一連降雨からそれぞれほぼ同数ずつ選んだ計200個の12時間降雨について, R_{12m}/R_{12} ($i=1, n=12$ の x に当り) と R_{12} の関係を示したものである。図-8は

その R_{12m}/R_{12} のヒストグラムで, 点線は(6)式より $n=12$ として得た理論値である。ほぼ適合しているとい

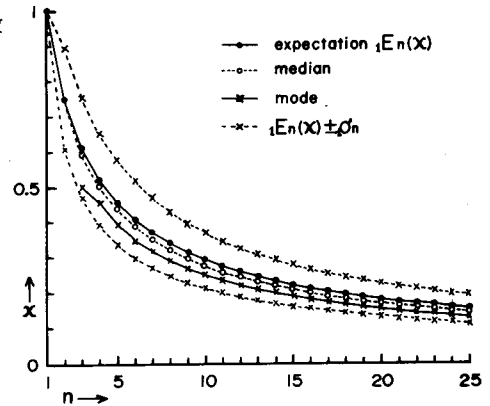


図-4

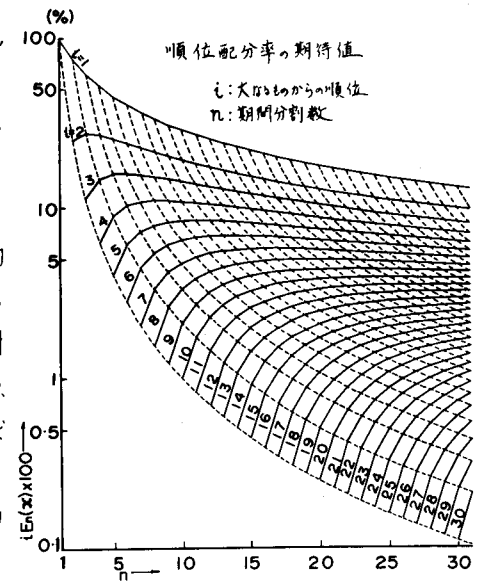


図-5

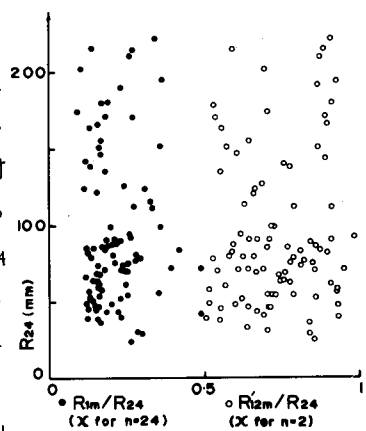


図-6

えよう。図-9の(a)は、上記と同じ24時間降雨の標本集合について、その n 等分最大配分率 R_{tm}/R_n ($t=1, 2, 3, 4, 6, 8, 12$)の平均値(白丸印)およびそれに対する標準偏差の増減値(×印)と、理論値(それぞれ実線と点線に対応)を比較したものである。なお、半黒丸印は時間連続最大配分率 R_{tm}/R_{24} ($t=1, 2, \dots, 24$)の平均値で、われわれはむしろこの分布の方により興味があるが、理論分布はまだ得ておらず、ただ、 $R_{tm} \geq \bar{R}_{tm}$ の関係があるため、比較の意味でプロットしたものである。同図の(b)は12時間降雨の場合について同様な比較をしたものである。いずれも、ほぼ適合しているようである。

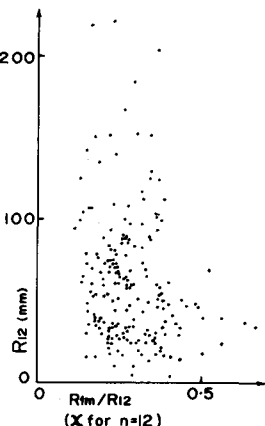


図-7

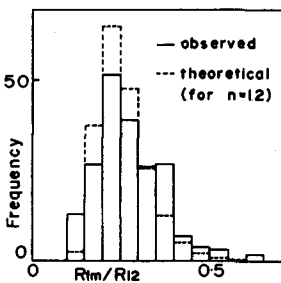


図-8

また、図-10は一連降雨④、⑤および⑥からそれぞれほぼ同数ずつ選んだ計120個の24時間降雨のデータについて、時間連続最大雨量 R_{tm} に対するその系列の1時間最大雨量 R_m の比の平均値 $\bar{R}_m/R_{tm}$ (すなわち $i=1, n=t$ の x の期待値に対応する)を、理論値 $E_n(x)$ と比較したものである。この図は、 t が1より小さい場合、実測値は理論値より小さく、 t がそれより大きいとその関係が逆転することを示しており、1時間最大降雨とその前後の1時間降雨強度 n 間には正の相関が若干あることを示唆していると考えられる。図-11は上記の120個の24時間降雨、および前記の200個の12時間降雨について、それぞれ順位配分率を求め、その各 i に対する平均値 $\bar{R}_i/R_n$ ($i=n-i+1$)と、(9)式による値と比較したものである。 $n=12$ の場合はよく合っているが、 $n=24$ の場合は適合度はあまりよくない。これは、降雨が同じ確しからしきで降り続く時間の限界を暗示していると考えられる。

5. あとがき

ここで用いた降雨資料は限られたものであるため、さらに広範な資料の解析が必要であるが、1時間ごとの平均強度の变化はほぼrandomであり、これに主降雨が12時間程度の場合についてはほとんどpure-randomとみなしてよいようである。なお、ここで論じたハイトグラフの形状の要素(順位配分率等)は時間的配列に関する情報については何ら示さないため実用上問題がなく、今後の課題である。

参考文献

- 1) 石原安雄・角星睦; 雨量配分に関する確率的な研究, 第5回水理研究会講演集, 1960.
- 2) 当倉万寿夫; 降水強度の時間的変化について, 日本気象学会 1967年春大会講演予稿集, 1967.5.
- 3) 太田正雄; William Feller; An Introduction to Probability Theory and Its Applications, John Wiley & Sons, Inc., Vol. I, 1957.

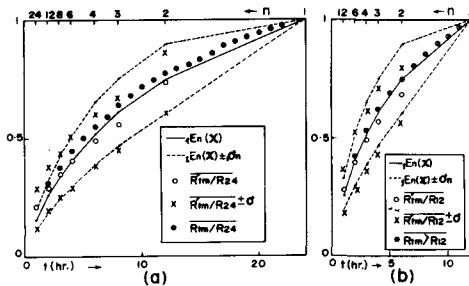


図-9

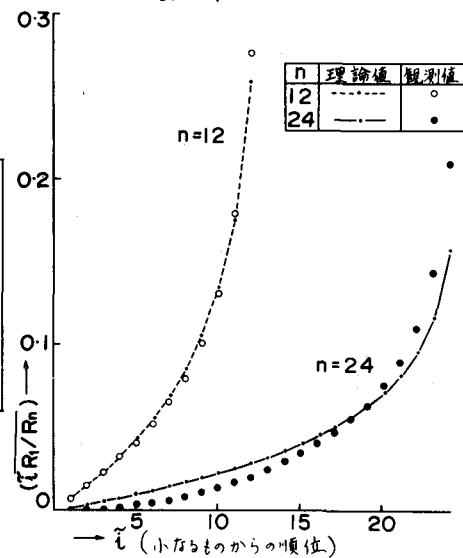


図-11

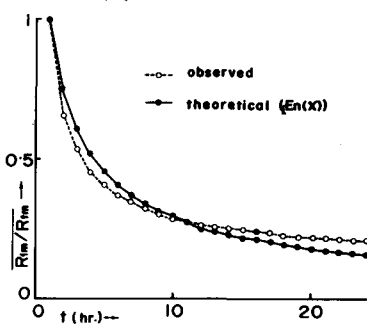


図-10