II-137 降雨特性に関する情報論的考察

九州大学工学部 正会員 篠原謹爾
清水建設 正会員 高崎英邦
九州大学工学部 学生員○迫田末寛

I. まえがき

降雨現象は、極めて不確定性が強く、その特性を計量的に把握することは、困難であるが、重要な問題である。降雨については、「雨がどれだけ降るか」だけでなく、「どのように降るか」という問題も考えられるべきである。そこで、本報では、筑後川上流域における梅雨、及び、台風型の雨の資料を用いて、降雨時系列の特性の計量化を試みた。即ち、降雨強度より降雨特性を知るという過程を一因子情報路と考え、さらに、降雨時系列をマルコフ連鎖と仮定することにより、降雨の時系列的特性を計量化して、若干の考察と発展の可能性を検討した。

II. 基礎理論

i) 一因子情報路　降雨特性について考えるとき、降雨強度は、一種の情報伝達の媒介体とみなすことができる。そこで、ここでは、降雨強度という一因子によって構成される情報路を設定する。降雨強度の小さな変動成分を除去するためと、実用上、降雨強度を適当な区間(レベル) ℓ 個に分割し、各々の区間には特性値を与える。いま、表-1の情報路を設定すると、一因子情報路容量に関する理論より、次の様にして、各レベルの生起確率が求められる。

レベル	$1, 2, 3, \cdots\cdots, \ell$
特性値	$t_1, t_2, t_3, \cdots\cdots, t_\ell$
出現回数	$n_1, n_2, n_3, \cdots\cdots, n_\ell$
生起確率	$P_1, P_2, P_3, \cdots\cdots, P_\ell$

表－1

$\sum_{i=1}^{\ell} n_i = n$ が十分に大であれば、近似的に $n_i/n = P_i$ $(i=1,2,\cdots,\ell)$ が成立し、また、特性値の総和は、$\sum_{i=1}^{\ell} n_i t_i$ であるから、この情報路により伝達される単位特性値あたりの情報量は、次式で示される。

$$I = \frac{-\sum_{i=1}^{\ell} n_i \log P_i}{\sum_{i=1}^{\ell} n_i t_i} = \frac{-\sum_{i=1}^{\ell} n_i/n \cdot \log P_i}{\sum_{i=1}^{\ell} n_i/n \cdot t_i} = \frac{-\sum_{i=1}^{\ell} P_i \log P_i}{\sum_{i=1}^{\ell} P_i t_i} = \frac{H}{\bar{t}} \qquad (1)$$

ただし、H：平均情報量(エントロピーにあたる)，$\bar{t} = \sum_{i=1}^{\ell} P_i t_i / \sum_{i=1}^{\ell} P_i$

ここで、単位特性値あたりの情報量 $H/\bar{t}$ を最大にするように各レベルが生起するものと仮定する。$\sum_{i=1}^{\ell} P_i = 1$ という制約条件の下に、$H/\bar{t}$ を最大にしなければならないから、この問題は、極値問題となる。そこで、λ を Lagrange 乗数として、

$$\partial/\partial P_i \left\{ H/\bar{t} + \lambda \sum_{i=1}^{\ell} P_i \right\} = 0 \qquad (2)$$

を計算すると、$\log P_i = -1 - t_i \cdot H/\bar{t} + \lambda \bar{t}$ (3)

となる。(3)式の両辺に P_i をかけ、$i(=1,2,\cdots,\ell)$ について和を求めることにより、$\lambda = 1/\bar{t}$ が求まる。$\lambda = 1/\bar{t}$ を(3)式に代入して、

$$P_i = a^{-t_i \cdot H/\bar{t}} = W^{-t_i} \qquad (4)$$

ただし、a: 対数の底，$a^{-H/\bar{t}} = W^{-1}$

$\sum_{i=1}^{\ell} P_i = 1$ であるから、

$$\sum_{i=1}^{l} W^{-t_i} = 1 \tag{5}$$

(5)の方程式には、正根が唯一つ存在するから、$C = H/T = \log W$（C:単位特性値あたりエントロピー）とすると、iレベルの生起確率は、次式で示される。

$$p_i = a^{-ct_i} \tag{6}$$

(6)式による推定値が求まったら、実測値との適合度を調べるためにχ^2検定を行なう。すなわち、

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{l}\{(\text{実測個数}) - (\text{推定個数})\}^2 / (\text{推定個数}) \tag{7}$$

の値により、有意か否かを検定する。ここで、推定個数とは、表-1の出現回数n_iのことであり、実測個数とは、同じレベルの実測の出現回数のことである。

ii) マルコフ連鎖　　ある時間、例えば、T_k〜T_{k+1}の降雨強度r_jは、それ以前の降雨強度の分布に対して、必ずしも独立でないと推定される。T_k〜T_{k+1}の降雨強度r_jは、直前のT_{k-1}〜T_kの降雨強度r_iに関係するものと仮定する。また、r_jは、降雨開始時からの経過時間T_kに無関係であるとすると、この降雨時系列は、マルコフ連鎖とみなせる。このとき、r_iが与えられると、次の時間の降雨強度r_jの生起確率は、条件付き確率p_{ij}によって与えられる。（後述の推移確率行列Pの各元が、p_{ij}となる。）

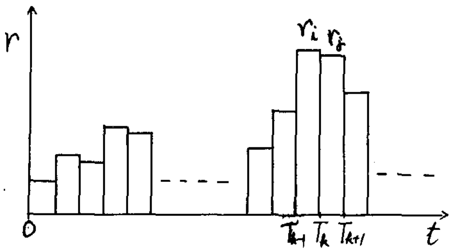

図-1

III. 適用

上述の仮定を、筑後川上流小平量水標地点上流域に適用した。降雨資料としては、昭和35年から、40年にかけて、1000 m³/sec 以上の出水を引き起こした7個を選び、ティーセン法により求めた流域平均雨量を用いた。

i) レベル分割　　まず、降雨強度（ここでは時間雨量）分布表、或いは図を作成する。これを参考にして、適当な間隔のレベルに分割する。特性値としては、各レベルの最大降雨強度をとることとし、χ^2検定により適合度を調べ、分割法を変化させる。はじめ、等間隔のレベルに分割して、順次、変えていくと、最終的に図-3に示す結果となり、図-4は、推定値と実測値とを比較したものである。

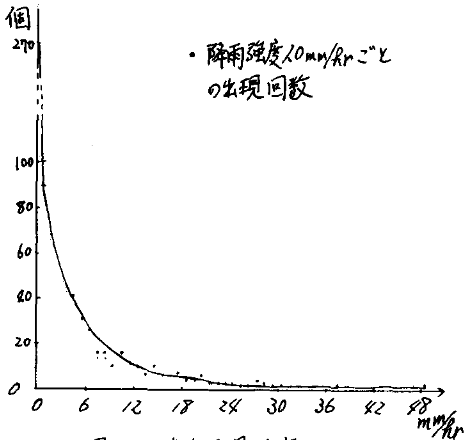

図-2：時間雨量分布

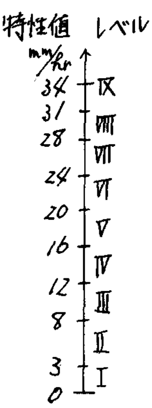

図-3

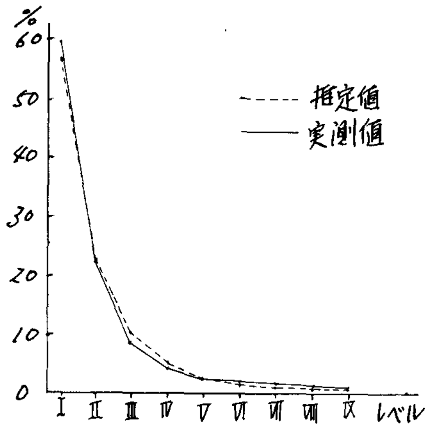

図-4

ii) 推移確率行列　　降雨強度を上記のレベルに置換して、推移確率p_{ij}を求めた。その推移確率

行列Pを表-2に示す。表-2は、各レベルの1段階(ここでは1時間)の推移確率を示すものであるが、これより、2段階、3段階、……後の状態を示す確率を求めることができる。たとえば、2段階の推移確率は、表-3で示される。

$P=$

	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ	Ⅸ
Ⅰ	0.868	0.128	0.002	0	0.002	0	0	0	0
Ⅱ	0.298	0.454	0.143	0.081	0.006	0.006	0.006	0.006	0
Ⅲ	0.073	0.400	0.218	0.145	0.091	0.055	0.018	0	0
Ⅳ	0.065	0.161	0.452	0.193	0.097	0	0.032	0	0
Ⅴ	0	0.294	0.176	0.059	0.118	0.059	0.176	0.118	0
Ⅵ	0.090	0.182	0.091	0.182	0.091	0.182	0	0	0.182
Ⅶ	0	0	0	0.143	0.286	0.428	0	0	0.143
Ⅷ	0	0	0.250	0	0.500	0	0.250	0	0
Ⅸ	0	0.250	0	0	0	0.250	0	0.250	0.250

表-2

$P'=$

	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ	Ⅸ
Ⅰ	0.791	0.171	0.021	0.011	0.003	0.001	0.001	0.001	0
Ⅱ	0.410	0.317	0.136	0.076	0.030	0.015	0.011	0.003	0.002
Ⅲ	0.213	0.338	0.191	0.110	0.057	0.038	0.027	0.013	0.013
Ⅳ	0.150	0.322	0.226	0.126	0.082	0.045	0.032	0.012	0.005
Ⅴ	0.110	0.259	0.163	0.103	0.152	0.104	0.057	0.016	0.036
Ⅵ	0.167	0.265	0.161	0.102	0.054	0.090	0.025	0.057	0.079
Ⅶ	0.048	0.221	0.154	0.122	0.087	0.130	0.055	0.069	0.114
Ⅷ	0.018	0.247	0.142	0.102	0.153	0.150	0.093	0.059	0.036
Ⅸ	0.097	0.221	0.121	0.066	0.149	0.110	0.064	0.064	0.108

表-3

2段階では、まだ、0となる元が残るが、3段階では、全ての元が正となる。($P_{ij}^{3}>0$) すなわち、3段階を経ると、任意のレベルから、他の任意のレベルに移りうることを示している。また、これより推移確率行列Pは、3次で正則である。正則であるから、初期状態に無関係となる極限分布Wを求めることができる。WP=W より、Wを求めると、下記の通りである。

$$W=(\overset{\mathrm{I}}{0.591},\ \overset{\mathrm{II}}{0.228},\ \overset{\mathrm{III}}{0.077},\ \overset{\mathrm{IV}}{0.044},\ \overset{\mathrm{V}}{0.024},\ \overset{\mathrm{VI}}{0.015},\ \overset{\mathrm{VII}}{0.010},\ \overset{\mathrm{VIII}}{0.006},\ \overset{\mathrm{IX}}{0.005}) \cdots (8)$$

iii)モデル降雨　　上記の推移確率行列を用いて、モンテカルロ法により、簡単なモデル降雨を作成することができる。初期確率を仮定し、推移確率に対応した数の範囲を定め乱数発生によって、順次、対応するレベルを求めていく。いま、初期レベルをⅠレベルと仮定した場合の一例を図-5に示す。

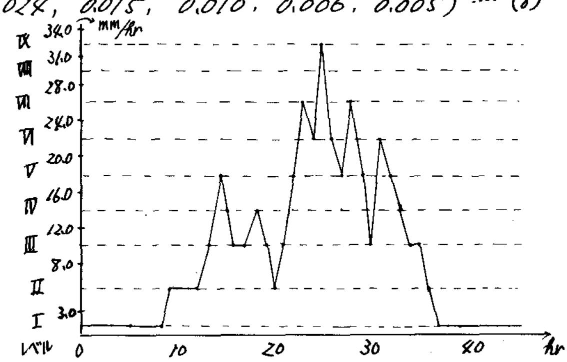

図-5 : モデル降雨の一例

Ⅳ、考察

i)レベル分割　　χ^2-検定の結果、有意とみなされたのは、図-3に示す分割法のみであった。これ由り、図-3のレベル分割が、この流域特有のものであるとみなすことができよう。すなわち、一因子情報路の仮定の下では、図-3のレベル分割の結果が、この流域の降雨の一特性を表わすものといえる。

ii)推移確率　　降雨時系列をマルコフ連鎖と仮定したことは、まだ、疑問の残るところであるが推移確率行列は、降雨が時間的にどのように変化していくかを示す一手法ではある。ただ、(8)式の極限分布には、問題がある。なぜなら、降雨強度の分布は、はじめから与えられており、その分布にしたがう範囲内で、推移確率を求めているからである。実際、この極限分布は、実測の分布と完全に一

致しているのである。(ただし、図-4に示す実測値の分布とは、わずかに異なる。それは、推移確率行列において、資料の各降雨の降り始めと終りの降雨強度の推移が、入っていないからである。)

iii)モデル降雨　　図-5に示すモデル降雨の一例は、あくまでも、過去の資料から、確率的に起こりうる降雨分布を示しているにすぎない。あらゆる可能な経路のうちの一つを示しているのである。

日雨量によって、制限を与えるには、次のような方法がある。

日雨量を r_d，時間雨量を r_i とするとき、

$$\sum_{i=1}^{24} r_i = r_d \tag{9}$$

であるから、　①日雨量 r_d についても、時間雨量 r_i と同様に、レベル分割を行なって、日雨量をレベルに置換する。

②乱数発生により、まず、日雨量 r_d を発生させる。

③次に、時間雨量 r_i を、順次、発生させる。

④ $\sum_{i=1}^{m} r_i > r_d$ となったとき、その差を r_m から差し引き、$(m+1)$ 時間以後は、$r_i = 0$ とする。(ただし $0 < m \leqq 24$)

$\sum_{i=1}^{24} r_i < r_d$ となったときは、最後の r_{24} にその差を加える。

(日雨量を規準に、かなり長期に及ぶモデル降雨を考える場合は、r_d についても、推移確率を求めればよいものと思われる。)

iv)まとめ　　この方法の問題として、次の点があげられる。

①連続した一つの降雨資料ではなく、7降雨を個々の時間雨量に、ばらばらに分解した上で、降雨時系列を考えていること。

②降雨期間の時間雨量0となるものも、Iレベルに含まれていること

③7降雨の累計時間は、719時間で、資料として、決して少ないとは思わないが、推移確率行列の値は、桁数の取り方によって、微妙に変わるなど、数値の精度が十分に信頼できないこと。

したがって、ここでは、1000 m³/sec 以上の出水を引き起こした降雨を対象としたが、月、あるいは年というような長期にわたって、平時の雨をも含めた流域の降雨について考えるような場合の方が、望ましいかもしれない。

降雨強度という一因子でもって、降雨特性を考えたわけであるが、信頼性が大とはいえないので、日雨量など、他の因子も考慮に入れて、この方法を適用することも考えられる。モデル降雨のみに、日雨量を導入する方法は、現在、続行中であるが、2因子、あるいは、多因子の場合の情報路設定も今後、検討の必要があると考えている。本報では、降雨特性の一指標を示したにすぎないが、降雨特性の適確な把握が、可能になれば、モデル降雨も有効となってくるものと思われる。

図-4の情報路容量を算出することにより求めた推定曲線と、実測曲線は、よく一致している。推定曲線は、指数曲線である。統計学における指数分布をなす現象が、時間の制約の下で、最大のエントロピーの下に起こると解釈するのは、すでに考えられたことであるが、このことが、(図-4の結果を見る範囲ではあるが)、降雨という自然現象に対してもいえることは、興味深いことである。統計的に把握しようという試みは、いろいろあるが、まだ、この段階では、極めて実用の可能性が小さいものの、情報という立場からの接近も、興味ある結果を示しているものと思われる。