II-133 確率水文量の推定に関する基本問題

中央大学理工学部　正会員　春日屋　伸昌

水文統計学において従来最も広く用いられてきた手法は標準正規分布を利用する方法である．すなわち，水文量xが正規分布N(μ, σ^2)に従うとき，超過あるいは非超過の確率Pに対応する確率水文量x_Pの値は，大きさnの任意標本x_i($i=1,2,\cdots,n$)より標本平均$\bar{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i/n$および標準偏差の推定値(不偏分散の平方根)$\hat{\sigma}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2/(n-1)}$を作れば，次の式：

$$x_P=\bar{x}\pm z_P\hat{\sigma}\quad(+：高水，-：渇水) \tag{1}$$

によって求められるとした．ここに，z_Pは超過確率Pに対応する標準正規分布上の分点値で，確率積分の数値表から容易に得られる．(1)式は水文統計学における基本式であって，水文量xが正規分布に従わなくても適当な変数変換(たとえば対数変換)を施すことによって正規化される場合には，正規化された変量をxと置けばそのまま成り立つ．しかし，z_Pを標準正規分布の分点値とすると実測資料へのあてはめに際してひずみの起こることが多くの学者によって指摘され，z_Pの代わりに次のような頻度係数Kを用いて，

$$x_P=\bar{x}+K\hat{\sigma} \tag{2}$$

とすることが提唱され，Kの図表がPとnさらには標本変動係数$C_v$$(=\hat{\sigma}/\bar{x})$あるいは標本ひずみ係数$C_s$$[=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^3/\{(n-1)\hat{\sigma}^3\}]$などの関数として提供された．

このようにKが標準正規分布からはずれるという経験的判断は正当であって，そのことは(1)式の誘導された基礎式：

$$z_i=(x_i-\bar{x})/\hat{\sigma} \tag{3}$$

が正規分布に従わないことを見れば明らかである．なぜならば，(3)式における$\bar{x}$および$\hat{\sigma}$はいずれも統計量であって，しかもz_iは正規変量の1次式では書き表わせないからである．

そこで，筆者は従来の論議を理論的に解明するために(3)式の従うべき標本分布の密度関数を誘導し，それを数表化することが必要であると考え，(3)式をz_iと区別するために，

$$u_i=(x_i-\bar{x})/\hat{\sigma} \tag{4}$$

と書いて，u_iの従うべき密度関数$\varphi(u)$を導くこととした．

さて，Thompsonの棄却検定法を拡張すると，次の量：

$$F_i=(n-2)\tau_i^2/(n-1-\tau_i^2)\quad[\tau_i^2=n(x_i-\bar{x})^2/\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2] \tag{5}$$

は自由度1，$n-2$のF－分布に従うから，$\tau_i^2=nu_i^2/(n-1)$であることに注意すると，

$$F_i=n(n-2)u_i^2/\{(n-1)^2-nu_i^2\} \tag{6}$$

は自由度1，$n-2$のF－分布に従い，その密度関数$f(F)$は，$n-2=\phi$と置けば，

$$f(F)=\phi^{\phi/2}B^{-1}[1/2,\phi/2]F^{-1/2}(F+\phi)^{-(\phi+1)/2}\quad[\phi>0] \tag{7}$$

(ここに，B$[\alpha,\beta]$はパラメーターがα,βであるベータ関数を表わす)

そこで，次の統計量：

$$y_i=(\phi+2)u_i^2/(\phi+1)^2=F_i/(F_i+\phi) \tag{8}$$

の従うべき標本分布の密度関数 $g(y)$ は，変数変換の定理を用いて $[F_i=\phi y_i/(1-y_i)]$，

$$g(y)=f(F)\,|dF/dy|=f\{\phi y/(1-y)\}\times\phi/(1-y)^2$$
$$=\phi^{\phi/2}B^{-1}[1/2,\phi/2]\{\phi y/(1-y)\}^{-1/2}[\{\phi y/(1-y)\}+\phi]^{-(\phi+1)/2}\phi/(1-y)^2$$
$$\therefore\ g(y)=B^{-1}[1/2,\phi/2]y^{-1/2}(1-y)^{\phi/2-1}\quad[\phi>0]\qquad(9)$$

すなわち，y_i の標本分布はパラメーターが $\alpha=1/2$，$\beta=\phi/2$ のベータ分布である．

（8）式と（9）式とより統計量 u_i の標本分布を導くことができる．すなわち，y_i が y と $y+dy$ との間に生ずる確率 $g(y)\,dy$ は，

$$g(y)\,dy=B^{-1}[1/2,\phi/2]y^{-1/2}(1-y)^{\phi/2-1}dy$$
$$=B^{-1}[1/2,\phi/2]\{(\phi+2)u^2/(\phi+1)^2\}^{-1/2}[1-\{(\phi+2)u^2/(\phi+1)^2\}]^{\phi/2-1}2(\phi+2)u/(\phi+1)^2du$$
$$=2B^{-1}[1/2,\phi/2]\{\sqrt{\phi+2}/(\phi+1)\}[1-\{(\phi+2)u^2/(\phi+1)^2\}]^{\phi/2-1}du$$

右辺が2倍されているのは u_i が u と $u+du$ との間に生ずる確率と $-u$ と $-u-du$ との間に生ずる確率とが等しいからである．ゆえに，u_i の密度関数を $\varphi(u)$ とすれば，u の正負にかかわらず，

$$\varphi(u)=B^{-1}[1/2,\phi/2]\{\sqrt{\phi+2}/(\phi+1)\}[1-\{(\phi+2)u^2/(\phi+1)^2\}]^{\phi/2-1}\qquad(10)$$

これを自由度 $\phi(=n-2)$ の u－分布と名づけておく．この分布の特性値は次のとおりである．すなわち，平均＝モード＝メジアン＝0，分散＝$(n-1)/n$，ひずみ度＝0，とがり度＝$3(n-1)/(n+1)$ であって，漸近分布は $N(0,1)$ である．

さて，超過確率 P とそれに対応する u－分布上の分点 u_P との間には次の関係がある．

$$P=\frac{1}{2}-\int_0^{u_P}\varphi(u)\,du=\frac{1}{2}-\frac{1}{B[1/2,\phi/2]}\int_0^{\theta_P}\cos^{\phi-1}\theta\,d\theta\left[\theta_P=\sin^{-1}\frac{\sqrt{\phi+2}\,u_P}{\phi+1}\right]\qquad(11)$$

（11）式から P と u_P との数値表を作成することができる．あるいは，（6）式の平方根が自由度 $\phi(=n-2)$ の t－分布に従うことを利用し，超過確率 P に対応する t－分布上の分点値を t_P で表わせば，

$$u_P^2=(\phi+1)^2t_P^2/\{(\phi+2)(\phi+t_P^2)\}\qquad(12)$$

となるから，これより求める確率水文量 x_P は，

$$x_P=\bar{x}\pm\{(\phi+1)t_P/\sqrt{(\phi+2)(\phi+t_P^2)}\}\sigma\quad(+：高水，－：渇水)\qquad(13)$$

表は $P=0.01,\ 0.02$ に対応する u_P の数値表で，$\phi=\infty$ に対応する u_P の値は標準正規分布に対する ξ_P に等しい．この表から明らかなように，u－分布の正規分布からのはずれは P が小さく ϕ が小さい（n が小さい）ほど顕著である．

ϕ ＼ P	0.01	0.02
5	1.889	1.761
10	2.090	1.899
15	2.164	1.949
20	2.203	1.974
25	2.227	1.990
30	2.243	2.000
50	2.276	2.021
100	2.301	2.037
∞	2.326	2.054

資料として52年間（$n=52$，$\phi=50$）の利根川栗橋地先における年最大高水量を使用し，その常用対数が正規分布するとの仮定に基づいて上述の理論をあてはめた結果は次のとおりであった．ここに，再現期間 T（年）は超過確率を P として $T=1/P$ である．

再現期間	確率水文量(m^3/s)	再現期間	確率水文量(m^3/s)	再現期間	確率水文量(m^3/s)
100	16820	40	12960	10	7880
80	15840	25	11140	8	7150
50	13870	20	10310	5	5670