II-120 降雨変動の流出に及ぼす影響

東工大(現・住宅公団) 正員 前田穂積
東工大工学部 正員 日野幹雄

I　はじめに　：　水文現象は極めて複雑であるが，それを客観的分析法により定量的に解析しようとするのが最近の傾向である。その一つは確率過程論に基づく Stochastic hydrology であり，他の一つが流体の物理法則に基づく Dynamic Hydrology である。そして，それらは急速な水文学の進歩をもたらしつつあると言って良いであろう。

たゞ，一つ両者について共通してみられ勝ちな欠点として，やゝもすればコムピューターに最後の段階で依存しがちなことである。それゆえ，個々のケースについての具体的解は得られても，全体的なあるいは一般的な見透しのできる解析を得ずに止ることも少くない。これはもちろん，流出現象の非線型によるものである。そこで，一つの考え方として方程式を線型化したり，極端な場合には流体の抵抗則を線型則で置き換えることもしてみる必要がある。こうした操作は，現象の量的な面には多少の歪を与えるであろうが，質的な面の本質には変化はないであろう。それにより，解析解が得られ水文現象の実体の把握が出来れば，量的な面の多少の歪という欠点を補って余りあると考えられる。II(a)では仮想の抵抗則により，II(b)では非線型項の線型近似により論ずる。

II　降雨強度の時間的変動と流出の変化

(a)　流速＝一定の場合

一定強度 r_0 の降雨に，振幅 r' の正弦波的変動が伴う場合を考える。一様傾斜の長さ L の斜面上の流速 V を一定値と考えると，時刻 t で流出量 $Q(t)$ は次のようになる。

$$Q(t)=\int_0^L i\left(t-\frac{x}{V}\right)dx=\int_0^L\left[r_0+r'\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{V}\right)\right]dx$$

$$=r_0L+r'L\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{L}{2V}\right)\sin\frac{\pi L}{TV}\Big/\frac{\pi L}{TV} \qquad (1)$$

式(1)の右辺は，"一定強度 r_0 の雨が長さ L の斜面に降った場合の流出量と，斜面の中央点で変動降雨を代表させてこれによる $L/2V$ 遅れの流出量 $r'L\sin(t-\frac{L}{2V})$ に減衰係数

$$D=\sin(\pi L/TV)/(\pi L/TV) \qquad (2)$$

を掛けたものの和" であると解釈される。式(2)によれば，降雨の時間変動の流出量への影響は，流域の長さ L が長いほど，降雨変動の周期 T が短いほど小さくなる。

(b)　$V=ah^N$ の場合

流れの抵抗則，連続式は次のようである。

$$V=ah^N\ ,\quad Q=ah^{N+1} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial h}{\partial x}=r(x,t) \qquad (4)$$

こゝに，降雨 $g(x,t)$ と水深 $h(x,t)$ を一様降雨に対する定常解の部分と変動分とに分けて表す。

$$g(x,t)=g_0+g'(x,t)\quad,\quad h(x,t)=h_0(x)+h'(x,t) \tag{5}$$

式(3)～(5)より，次の2式が得られる。たゞし，近似的に $h^N \cong h_0^N(1+Nh'/h_0)$ とする。

$$a(1+N)h_0^N\frac{\partial h_0}{\partial x}=g_0\quad, \tag{6}$$

$$a(1+N)h_0^N\frac{\partial h'}{\partial x}+aN(1+N)h'h_0^{N-1}\frac{\partial h_0}{\partial x}+aN(1+N)h_0^{N-1}h'\frac{\partial h'}{\partial x}+\frac{\partial h'}{\partial t}=g'(t) \tag{7}$$

式(6)の解は求められており（Eagleson：Dynamic Hydrology）こゝでは既知として取扱う。したがって，$A=a(1+N)h_0^N(x)$，$C=aN(1+N)h_0^{N-1}\partial h_0/\partial x$，$D=aN(1+N)h_0^{N-1}$，$h'\to h$ と置けば，式(7)は

$$A\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial t}+Ch+Dh\frac{\partial h}{\partial x}=g(x,t) \tag{8}$$

となる。まず，降雨変動は小さいとし，2次の微少項を一応省略し $h(x,t)$ および $g(x,t)$ を次のように表す。

$$h(x,t)=\sum\left[a_m(t)\sin\frac{m\pi x}{L}+b_m(t)\cos\frac{m\pi x}{L}\right] \tag{9}$$

$$g(x,t)=\sum\left[\varphi_m(t)\sin\frac{m\pi x}{L}+\psi_m(t)\cos\frac{m\pi x}{L}\right] \tag{10}$$

いま，$g(x,t)$は降雨の時間的場所的変動分で既知であり，$\varphi_m\cdot\psi_m$ は一般に次のようである。($g(t)=g'\sin 2\pi t/T$ として，具体的に示すと），

$$\varphi_m(t)=\frac{2}{L}\int_0^L g(x,t)\sin\frac{m\pi x}{L}dx=\frac{4g'}{m\pi}\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\quad(m=2m'+1) \tag{11}$$

$$\psi_m(t)=\frac{2}{L}\int_0^L g(x,t)\cos\frac{m\pi x}{L}dx=0 \tag{12}$$

式(9)(10)(11)(12)を式(8)に代入し，整理すれば次の連立常微分方程式が得られる。

$$\left.\begin{aligned}\dot{a}_m(t)+\frac{C}{A}a_m(t)-\frac{m\pi}{LA}b_m(t)&=\frac{4B}{m\pi A}\sin\frac{2\pi t}{T}\\ \dot{b}_m(t)+\frac{C}{A}b_m(t)-\frac{m\pi}{LA}b_m(t)&=0\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

これを解けば，$a_m(t)\cdot b_m(t)$について次式が得られる。

$$a_m(t)=C_1e^{-at}\cos\frac{m\pi}{LA}t+\frac{k}{4d}\left[(-\alpha E+aF)\sin\alpha t+(\alpha F+E)\cos\alpha t\right] \tag{14}$$

$$b_m(t)=C_2e^{-at}\cos\frac{m\pi}{LA}t+\frac{k}{4}\left[E\cos\alpha t+F\sin\alpha t\right] \tag{15}$$

こゝに，$a=C/A$，$d=m\pi/LA$，$k=4g'/m\pi A$，$\alpha=2\pi/T$，

$$E=\left\{[a^2+(\alpha-d)^2]^{-1}-[a^2-(\alpha+d)^2]\right\}\times 2a,\quad F=\left\{2(\alpha-d)[a^2+(\alpha-d)^2]^{-1}-2(\alpha+d)[a^2+(\alpha+d)^2]^{-1}\right\}$$

上式(9)(14)(15)において，$x=L$，$t\to\infty$ の状態を考えれば，

$$b_m(t)=\frac{4g'}{\pi Am}\left[E\cos\alpha t+F\sin\alpha t\right] \tag{16}$$

式(16)からも，流出量の変化あるいは流域下流端での水位変化は，流域が長いほど，降雨変動の周期の短かいほど減衰することがわかる。式(16)は非線型抵抗式に基づいて導かれたから定量的な結論である。