

II-109 粘性振動の減衰性に関する研究

東京都立大学工学部 正員 安 川 浩
東京都立大学大学院 学生員 〇田 川 昌 宏

§-1. 総 言

U字管の水面振動あるいは貯水せし調圧水槽とを結ぶ管路に於ける振動流の粘性による減衰はそれ自体非常に興味ある問題であるが振動の減衰率及び周期の粘性や管路常数等いかなる関数として定まるかに就いては未だ明らかではないように思われる。例えば連結管振動では減衰項が速度の一次あるいは二次に比例すると仮定すれば微分方程式は解けるが比例常数そのものの如くどのように定まるかは明らかではない。

我々は連結管の水面振動及び細長い円筒形浮体の縦振動に伴う流れをいづれも円筒形境界を有する流れの場合と考え減衰性を表現するたために複素角速度 ω で振動する振動解を仮定した。円筒座標で考えれば前者は $0 \leq r \leq r_0$ の領域に於ける運動であるのに対して後者は $r_0 \leq r$ の領域に対応する点々異なるのみである。

未定常数である複素角速度 ω は Navier-Stokes の方程式の解として速度分布を形式的に求めた後に連続条件あるいは浮体の運動方程式等のマッチング条件から数値的に計算される。その結果連結管の水面振動及び浮体の縦振動に於ける減衰率と周期は層流状態ではほぼひとつのパラメタ $\gamma = r_0 \sqrt{\gamma_s}$ により表わされることが、及び実験値は計算による予測値とほぼ完全に一致することが明らかになった。

§-2 連結管振動に於ける減衰率並びに周期

円筒座標に於ける Navier-Stokes の方程式は管軸方向の運動が支配的であると仮定すれば次式で与えられる。

$$\rho \frac{\partial U_z}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_z}{\partial r} + U_\theta \frac{\partial U_z}{\partial \theta} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 U_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \right) + F_z$$

連続条件より $\frac{\partial U_z}{\partial z} = 0$ また $U_z \gg U_r, U_\theta$ の仮定より

$$\rho \frac{\partial U_z}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho} + gh \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 U_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial r} \right)$$

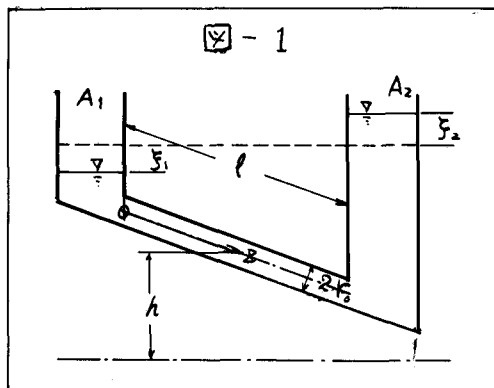
ω を未定の複素角速度とする周期解を仮定すれば

$$U_z(r, t) = f(r) \cdot e^{i\omega t}$$

$$\omega = \omega_r + i\omega_i$$

$$\begin{aligned} \therefore \left(\nu \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{df}{dr} - i\omega f \right) e^{i\omega t} \\ = \frac{1}{\rho} \left\{ \left(\frac{p}{\rho} + gh \right)_{z=l} - \left(\frac{p}{\rho} + gh \right)_{z=0} \right\} \\ = \frac{\rho}{\rho} (\xi_2 - \xi_1) \end{aligned}$$

ξ_1, ξ_2 は図-1 に示されるように自由水面の上昇高。



連続条件より $A_1 \zeta_1 + A_2 \zeta_2 = 0$, また $\zeta_2 = \zeta_0 \cdot e^{i\omega t}$ より

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{i\omega}{v} f = \frac{g \zeta_0}{v l A_1} (A_1 + A_2)$$

$\chi = r \sqrt{-i\omega/v}$ と置く

$$\frac{d^2 f}{d\chi^2} + \frac{1}{\chi} \frac{df}{d\chi} + f = \frac{i g \zeta_0}{\omega l A_1} (A_1 + A_2) \dots \dots \dots (2-1)$$

境界条件 $r=0$ で $f(\chi)$ は有限, 又 $r=r_0$ (管壁) で $f(\chi)=0$ へ下へ解けば

$$f(\chi) = \frac{i g \zeta_0}{\omega l A_1} (A_1 + A_2) \left\{ 1 - \frac{J_0(\chi)}{J_0(\chi_0)} \right\} \quad \chi_0 = r_0 \sqrt{-\frac{i\omega}{v}}$$

ここに $J_0(\chi)$ は オーターゼロ の 第一種ベッセル関数。

未定常数 ω については 連続の条件より 管内流量と 水面上昇速度との関係より

$$\int_0^{r_0} 2\pi r \cdot U_z \cdot dr = A_2 \frac{d\zeta_2}{dt}$$

$U_z = f(\chi) e^{i\omega t}$, $\zeta_2 = \zeta_0 e^{i\omega t}$, $\chi = r \sqrt{-\frac{i\omega}{v}}$, $\chi_0 = r_0 \sqrt{-\frac{i\omega}{v}}$ 等より

$$\pi r_0^2 \frac{g(A_1 + A_2)}{l A_1 A_2} \left\{ 1 - \frac{2}{\chi_0} \frac{J_1(\chi_0)}{J_0(\chi_0)} \right\} = \omega^2 \dots \dots \dots (2-2)$$

一方 非粘性と仮定したときの 連結管振動の角速度 n は $n^2 = \frac{\pi r_0^2 (A_1 + A_2) g}{l A_1 A_2}$

故に 無次元化したときの 複素角速度を $\Omega = \frac{\omega}{n}$, また無次元化した管径を $\gamma = r_0 \sqrt{\frac{n}{v}}$ と置くことにし、若干の変形の結果 解くべき方程式は 次式で与えられる。

$$\frac{\chi_0^4 \cdot J_0(\chi_0)}{J_2(\chi_0)} = \gamma^4 \quad \text{ここに} \quad \chi_0 = \gamma \sqrt{-i\Omega} \quad \dots \dots \dots (2-3)$$

$$\text{即ち} \quad \text{Re}\{F(\chi_0)\} = \gamma^4 \quad \text{Im}\{F(\chi_0)\} = 0 \quad F(\chi_0) = \frac{\chi_0^4 \cdot J_0(\chi_0)}{J_2(\chi_0)}$$

§-3, 細長い 浮体 の 縦振動

運動方程式 又 連続式は 前項と同じで

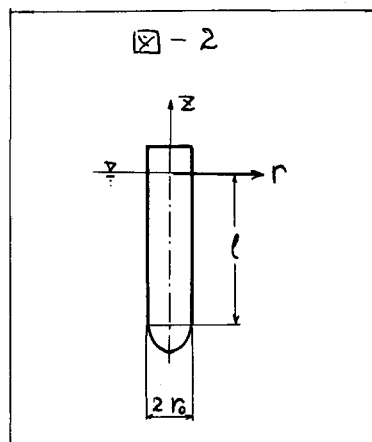
$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho} + g z \right) = v \left(\frac{\partial^2 U_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) - \frac{\partial U_z}{\partial t}$$

浮体周辺の 圧力分布を 静水圧分布と仮定して

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho} + g z \right) = 0$$

前項同様 $U_z(r, t) = f(r) e^{i\omega t}$, $\chi = r \sqrt{-\frac{i\omega}{v}}$

$$\frac{d^2 f}{d\chi^2} + \frac{1}{\chi} \frac{df}{d\chi} + f = 0 \quad \dots \dots \dots (3-1)$$



$\sigma=2$ 種のベッセル函数を $Y_n(z)$ で表わせば (3-1) の一般解は次式で表わされる。

$$f(x) = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x)$$

境界条件 $x = x_0$; $f(x_0) = \frac{d\zeta}{dt} = i\omega\zeta_0$, $x \rightarrow \infty$; $f(x) = 0$

$x \rightarrow \infty$ に於けるベッセル函数の漸近展開式より

$$J_0(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \cos(x - \frac{\pi}{4})$$

$$Y_0(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x - \frac{\pi}{4})$$

無限遠に於ける境界条件 $f(x) = 0$ より $C_2 = \pm i C_1$

一方浮体壁の条件より $C_1 \{ J_0(x_0) \pm i Y_0(x_0) \} = i\omega\zeta_0$

故に
$$f(x) = \frac{i\omega\zeta_0}{J_0(x_0) \pm i Y_0(x_0)} \{ J_0(x) \pm i Y_0(x) \} \dots \dots \dots (3-2)$$

複素角速度 ω に於いては浮体質量を M とすれば浮体の運動方程式より

$$M \frac{d^2\zeta}{dt^2} = -\rho g \pi r_0^2 \zeta - 2\pi r_0(l - \zeta) \tau_0 \quad \tau_0: \text{壁面の剪断応力} \dots (3-3)$$

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right)_{r=r_0} = \mu \sqrt{-\frac{i\omega}{\nu}} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)_{x=x_0} = -\mu \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} \cdot i\omega\zeta_0 \left\{ \frac{J_1(x_0) \pm i Y_1(x_0)}{J_0(x_0) \pm i Y_0(x_0)} \right\} e^{i\omega t}$$

$J_n(x) + i Y_n(x) = H_n^{(1)}(x)$, $J_n(x) - i Y_n(x) = H_n^{(2)}(x)$ はそれぞれ $\sigma=1$ 種及び $\sigma=2$ 種のハンケル函数で (3-2) 式の複号はそれぞれ $\sigma=1$ 種 $\sigma=2$ 種に対応する。 $\sigma=1$ 種のみを考えれば充分である。 $\tau_0 = M = \rho \pi r_0^2 l$, $\zeta = \zeta_0 e^{i\omega t}$ と $\{ \gg \zeta \}$ の仮定の下に (3-3) に代入して

$$\omega^2 = \frac{g}{l} + \frac{2\nu^2}{r_0} \left(-\frac{i\omega}{\nu} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{H_1^{(1)}(x_0)}{H_0^{(1)}(x_0)}$$

$$\therefore \frac{g}{l} = n^2, \quad x_0 = r_0 \sqrt{-\frac{i\omega}{\nu}} = \gamma \sqrt{-i\Omega}, \quad \gamma = r_0 \sqrt{\frac{n}{\nu}}, \quad \Omega = \frac{\omega}{n} \quad \text{を考慮すれば}$$

$$F(x_0) = -x_0^4 \left\{ 1 + \frac{2}{x_0} \cdot \frac{H_1^{(1)}(x_0)}{H_0^{(1)}(x_0)} \right\} = \gamma^4$$

即ち $\text{Re}\{F(x_0)\} = \gamma^4$, $\text{Im}\{F(x_0)\} = 0$, $x_0 = \gamma \sqrt{-i\Omega}$

以上の結果は形式的には連結管の水面振動の場合と同一である。 $\pi/2 \arg \Omega \leq 0$ を考慮し

無次元角速度 $\Omega = \frac{\omega}{n} = \frac{\omega}{n} + i \frac{\omega}{n}$ n 数値的に求むれば減衰率 $= e^{-2\pi \frac{\omega}{n}}$ 及び

無次元粘性振動角速度 ω/n はそれぞれ簡単に求められる。計算結果並びに実験値は次頁図-3 及び 図-4 に示す。

§-4 実験方法と結果及び考察

(連結管振動) 前述の計算は一般的な連結管について行なったが、実験では管路出入口でのエネルギー損失の影響を除去するために内径の異なる U 字管を用いた。水位は塩化ビニール製 U 字管の直立部の内側に貼付した抵抗線水位計により最大振幅 20 cm で測定を行なった。減衰振動の周期と減衰率は各ピーク毎にほぼ一定しており、記録紙から読取りは、記録紙フルスケールの $\frac{1}{2}$ 程度迄を対象とした。

(浮体の縦振動) 管内水面振動の場合と異なり、浮体の入さとの関係上、水位計の使用は好ましくない。浮体背後に自造板を立て、望遠レンズ装着のボレックス社製 16 ミリシネカメラで振動する浮体を撮影した。振動周期は、同調させたフィルム面の 50 Hz タイミングマークにより求めたものである。

浮体の寸法は細長比を変え、水没長 l と浮体外径 d との比 l/d をそれぞれ 10, 20, 30 にするようバラストで調節した。実験値と予測値との比較は、周期に拘りてはほぼ完全に一致をみるが、減衰率に拘りては細長比と若干の関係があり、細長比 l/d の大きなもの程、予測値に近いことが認められる。

§-5 結 語

以上の考察に於いては、層流境界層の範囲内で粘性による減衰を論じたのであるが、管内の水面振動に於いては、管内の速度分布から直接的に減衰率や速度が規定されることが明らかになった。それ故乱流時に於いても速度分布を明らかにすることにより、同様の手法により求めることが可能である。

尚、浮体の実験を行なうにあたり、都立大学工学部工学研究室 川口士郎助教授、及び交通工学研究室 鍋島泰雄の両氏に有難い助言を頂戴した。ここに厚く御礼申し上げる。

参考文献

- (1) Th. Sævi "Über der von E. G. Richardson entdeckten „Annulareffekt.“" Z. Phys. 61, 1930
- (2) Watson "Theory of Bessel Functions" Cambridge Univ. Press
- (3) 梶浦欣一郎 "波に伴う粘性摩擦境界層について" 東大工学研究所報告 Vol. 26 1968

