

河川での物質の分散機構を理解する目的で、数多くの実験が行なわれてきたがそれらのほとんどすべては直線水路で行なわれたものであり、河川本来の姿からして弯曲水路での実験がより望ましい。本研究で用いられた水路は Fig-1 に示されているように bend 間に直線部をはさみ交互にその向きを変える 13 個の bend からなる全長 25m、巾 0.25m、深さ 0.2m の矩形断面水路である (flume I)。研究の第 1 目的は、弯曲流における流れ方向の分散機構を調べ、水路全体の平均的な分散係数 (Overall longitudinal dispersion coefficient) が水理量、流路幾何形状とどのように関係づけられしかを調べる。第 2 目的は、弯曲部に沿って変化する局所的な分散係数と二次流の関係を調べる。

拡散の基礎式 直交曲線座標系 (x, y, z) を用いて拡散の基礎式を導く。 $z = \text{const.}$ は水路中心軸に直角な平面、 x はその上の固定点から水路中心軸に沿う距離、 $y = \text{const.}$ は水路床に平行な平面、 y は水路床からの距離、 $z = \text{const.}$ は水路中心軸に平行で $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ に直角な表面、 x は水路中心軸からの距離である。基礎式は

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x} (cu) + \frac{\partial}{\partial y} (cv) + \frac{\partial}{\partial z} (cw) + \frac{c\omega}{r_c h_1} = \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon_x \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon_y \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\epsilon_z \frac{\partial c}{\partial z} \right) + \frac{1}{r_c h_1} \left(\epsilon_z \frac{\partial c}{\partial z} \right) \quad (1)$$

ここに $h_1 = 1 + z^2/r_c^2$, $-B/2 \leq z \leq B/2$, h_1 は曲線座標系に対する linearizing factor であり、 r_c と B はそれぞれ曲率半径と水路巾である。Taylor¹⁾ と同様に速度と濃度を断面平均と断面平均からの変化量との和で表す:

$$u(x, y, z) = \bar{u} + u'(x, y, z) \quad (2)$$

$$c(x, y, z, t) = \bar{c}(x, t) + c'(x, y, z, t)$$

$$\bar{u} = \frac{1}{A} \int_A u dA$$

$$\bar{c} = \frac{1}{A} \int_A c dA \quad (3)$$

ここに A は流水断面積である。

関係式 (2) を (1) に代入し、断面平均をと

ると拡散の基礎式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} &\approx - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u'c'}{h_1} \right) - \frac{\bar{w}\bar{c}}{r_c} \\ &- \frac{1}{r_c} \left(\frac{w'c'}{h_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\epsilon_x}{h_1^2} \right) \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\epsilon_x}{h_1^2} \frac{\partial c'}{\partial x} \right) + \frac{1}{r_c} \left(\frac{\epsilon_z}{h_1} \frac{\partial c'}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

(4) 式の overbar は断面平均を示す。もし (6a), (7a), (8) の仮定がなされれば、方程式 (4) は一様流に対する一次元分散方程式になる:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = K_x \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} \quad (5)$$

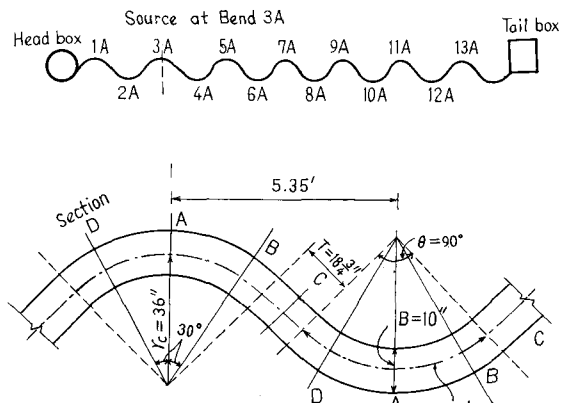


Fig. 1 Experimental flume

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w'c'}{h_i} \right) - \frac{1}{Y_c} \left[\bar{w} \cdot \bar{c} + \left(\frac{w'c'}{h_i} \right) - \left(\frac{\bar{c} \partial c'}{\partial x} \right) \right] = K_c \frac{\partial \bar{c}}{\partial x^2} \quad (6a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\bar{c}_x}{h_i^2} \right) \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} + \left(\frac{\bar{c}_x}{h_i^2} \right) \frac{\partial c'}{\partial x} \right] = \bar{c}_x \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} \quad (7a), \quad K_x = K_c + \bar{c}_x \quad (8)$$

ここに K_x は縦分散係数 (longitudinal dispersion coefficient), K_c は convective dispersion coefficient, $\bar{c}_x$ は, turbulent mixing coefficient の x 成分である。(6a) に於て左辺の 4 項の和が濃度 x に関して 2 次微分に比例すると仮定しているが、本質的には、縦方向と横方向の質量輸送量は分離して考えられるべきものであろう。この場合 (5) 式の右辺に水路の曲りに起因する横方向の質量輸送項がくわわる。もしも、曲率半径が水路中に比して十分大きいならば、 h_i は 1 に近き横方向の質量輸送は無視し小得る。たとえ曲率半径が大きい場合でも弯曲のパターンが本実験水路のように交互にその向きを変え一連の bend からなる場合には、数 bend にわたってトレーサが広がり横方向の質量輸送の影響が互に消し合うため水路全体に及ぼす曲率の影響は小さいと考えられる。

この場合 (6a) と (7a) は

$$-\frac{\partial}{\partial x} \bar{w'c'} = K_c \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} \quad (6b)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{c}_x \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} + \bar{c}_x \frac{\partial c'}{\partial x} \right) = \bar{c}_x \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} \quad (7b)$$

縦分散係数の計算法

(a) Moment method

$$K_x = \frac{\bar{u}^2}{2} \frac{dG_2}{d\bar{x}} \quad (9)$$

$$G_2 = \frac{\int_0^\infty t^2 \bar{c} dt}{\int_0^\infty \bar{c} dt} - \bar{t}^2, \quad \bar{t} = \frac{\int_0^\infty t \bar{c} dt}{\int_0^\infty \bar{c} dt}$$

(b) Routing method

Instantaneous plane source の条件を用いて (5) 式を解き基本解を重ね合せにより、 x_1 の下流 x_2 での時間に関しての濃度分布が得られる。

$$C(t, x_2) = \int_0^t f_c(t - t_1; x_2 - x_1) \cdot C(t_1, x_1) dt_1$$

$$f_c(\tau; \xi) = \frac{\bar{u}}{2\sqrt{\pi K_x \tau}} e^{-\frac{(\xi - \bar{u}\tau)^2}{4K_x \tau}} \quad (10)$$

$\tau = t - t_1$, $\xi = x_2 - x_1$, $C(t_1, x_1)$ は x_1 で測定された既知の濃度分布である。

(c) Diffusive transport method

方程式 (6b) に於て、十分小さい間隔 Δx で K_c を一定とし、Taylor hypothesis が適用できると仮定すると convective dispersion coefficient は

$$K_c = \bar{u} \frac{\frac{w'c'}{\partial t}|_{x_2} - \frac{w'c'}{\partial t}|_{x_1}}{\frac{\partial \bar{c}}{\partial t}|_{x_2} - \frac{\partial \bar{c}}{\partial t}|_{x_1}} \quad (11)$$

(a), (b) は水路全体にわたる平均的な縦方向分散係数の決定に対し、(c) は弯曲に沿って変化する

Table - 1

Run	水量(ℓ)	勾配(S)	$\bar{u}$ ($\frac{m}{s}$)	K_x ($\frac{m^2}{s}$)
S-1	0.185	0.000582	0.734	0.117
S-2	0.112	0.000582	0.659	0.122
S-3	0.100	0.000582	0.645	0.116
S-4	0.115	0.000582	0.625	0.115
S-5	0.139	0.000582	0.739	0.121
S-6	0.080	0.000582	0.535	0.110
S-7	0.181	0.000582	0.733	0.108
S-8	0.078	0.0012	0.790	0.166
S-9	0.186	0.0012	1.260	0.167
S-10a	0.112	0.0012	0.946	0.148
S-10b	0.112	0.0012	0.946	
S-11	0.145	0.0012	1.086	0.158
S-12	0.076	0.0012	0.808	0.164
S-13	0.186	0.0012	1.260	0.171
R-1	0.197	0.000582	0.579	0.170
R-2	0.123	0.000582	0.394	0.169
R-3	0.147	0.000582	0.460	0.180
R-4	0.118	0.0012	0.588	0.227
R-5	0.186	0.0012	0.742	0.219
R-6	0.100	0.0012	0.546	0.213
R-7	0.230	0.0012	0.833	0.284
SN-1	0.080	0.0012	0.700	0.098
SN-2	0.113	0.0012	0.880	0.095
SN-3	0.161	0.0012	1.035	0.088
SN-4	0.093	0.0012	0.810	0.180
SN-5	0.204	0.0012	1.070	0.078

局所的な分散係数の決定に用いられる。

平均的分散係数 K_x

実験結果を Table-1 に示す。Run number につけられた S, R は flume-I の水路床が滑と粗な場合に相当し, SN は flume-I の中心線沿いに壁を設け水路を左右に縮めた槽面水路 (flume II) を表わしている。Fig. 2 は K_x を仮定し (10) 式から計算された濃度分布と実測濃度分布の比較の一例である。広い範囲の実験条件にわたって既知の濃度-時間曲線 $C(t, x_1)$ を用い (10) 式によって下流に追跡した濃度分布は source 付近を除いて実験値と非常によく一致した。Fig. 3 はトレーサーの G^2 が source 付近を除いて流下距離と直線関係にあることを示している。Fischer²⁾ は (5) 式と (8) 式の K_x が同値であることを理論的に証明している。事実、本実験は広い範囲の水理条件に於ても両式から計算された K_x はほぼ等しいことを明らかにした。これらの実験結果は 直線水路²⁾と同様に弯曲水路に於ても source 付近を除いて物質の分散機構がみかけの分散係数を用いて、平均的には一次元拡散方程式によって表わされることを示している。

実際の立場から K_x を水理量と流路の幾何形状から決定できることが望ましい。次元解析は次の簡単な関係を導いた。

$$\frac{K_x}{u_* R} = F\left(\frac{r_c}{d}, \frac{\bar{u}}{u_*}\right) \quad (12)$$

ここに d は平均水深, R は径深。Fig. 4 に示されている $K_x/u_* R$ と r_c/d の関係は実験水路と同様に河川のデータに適用可能にみえる。しかしこの関係の物理的妥当性を説明することはおぼつかない; 特に r_c が無限大 (直線水路) に近づく場合の $K_x/u_* R$ の値の説明は困難である。

Bend に沿っての局所的分散係数の変化

水路中方向の速度勾配は物質の分散を支配する最も重要な要素の一つである²⁾。

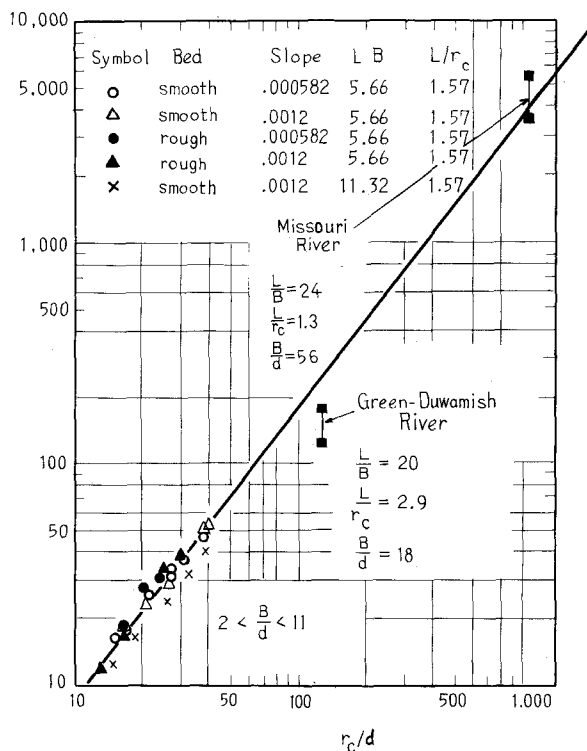
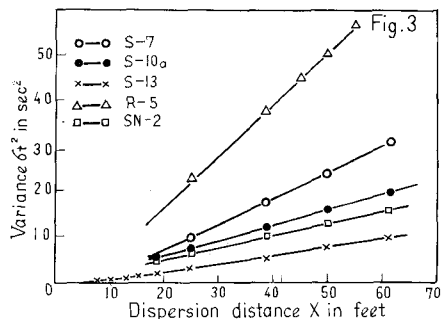
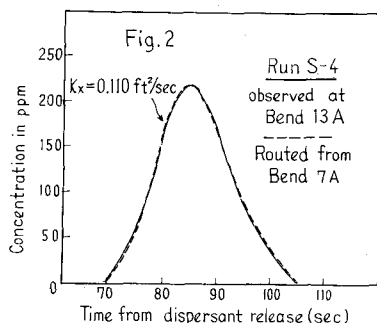


Fig. 4

横方向の速度変化を示すパラメータとして (13) 式によって定義される β を用いる:

$$\beta = \frac{\int_0^B (u - \bar{u})^2 dz}{\bar{u}^2 B} = \frac{1}{B} \int_0^B \left(\frac{u'}{\bar{u}} \right)^2 dz \quad (13)$$

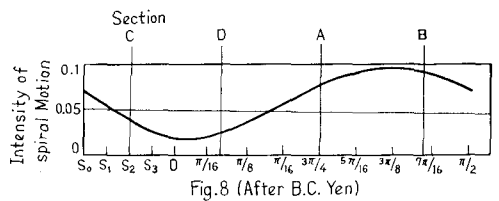
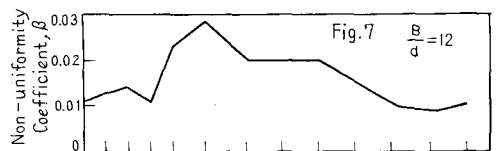
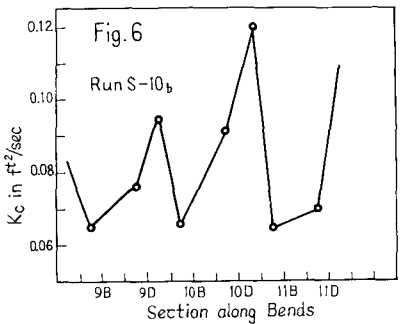
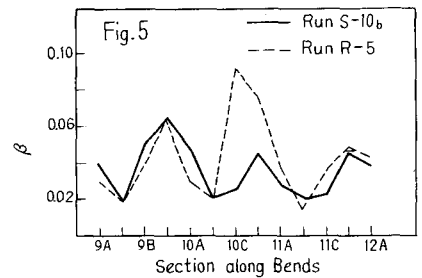
β は bend に沿う断面内の詳細な速度分布の測定から求められた (Fig. 5)。又 (11) 式から局所的な縦分散係数の分布が求められた (Fig. 6)。Fig. 5 と Fig. 6 は速度分布の横方向の非一様性の度合いが増すにつれて、縦方向の分散係数が大きな値をとることを示している。

本実験では二次流の測定は行なわれなかったが使用した実験水路は B.C. Yen³⁾ の使用した水路に相似じあひるので Yen の結果が利用可能である。Fig. 7 は (13) 式を用いて著者が Yen の与えた速度分布から non-uniformity coefficient β を計算した結果であり、Fig. 8 は Yen の測定した二次流強度の分布である。ここに二次流の強度は (14) 式で定義される:

$$\int_0^d \left| \frac{w}{V_0} \right| dy \quad (14)$$

V_0 は bend に入る前の直線部の中心線上の平均速度であり、 w は主流に直角方向の速度である。Fig. 7 と Fig. 8 から二次流強度は β とほぼ 180° phase のずれが見出される。すなわち二次流は断面内の速度分布を一様化する傾向があることを示している。

Figs. 5, 6, 7, 8 を総合すると convective dispersion coefficient K_c は水路中方向の速度勾配の増加とともに増加し、二次流強度の増大とともに減少する。二次流強度の増大は、当然水路中方向の混合を活発にするので乱れの質量輸送係数 E_x は大きな値をとる。その結果 流水方向の分散係数 K_x と E_x は互に逆比例する関係があり、使用した彎曲水路では、両者は 180° phase のずれが生ずると予想される。



1) Taylor, G.I.: Proc. Roy. Soc. of London, Vol. 223A, 1954.

2) Fischer, H.B.: Report No. KH-R-12, California Institute of Technology, 1966.

3) Yen, B.C.: Institute of Hydraulic Research, the Univ. of Iowa, 1965.