

II-77 長方形水路の流れに関する一近似計算

日本大学工学部 正員 木村喜代治

長方形水路の流れが層流のとき、各種水理量は理論的に計算される。しかし乱流の場合には流れの三次元的解析が必要であつて厳密には困難である。乱流の場合に側壁粗度の影響に関する研究は Einstein, Haywood, Keulegan, 足立などによつて行なわれた。

本報は Prandtl-Kármán の対数法則を用いて、流れを水平と鉛直の二次元流れの組合せとして取扱つた。このとき摩擦速度の分布を決める常数の決定条件には流れを全体として取扱つたときの境界摩擦力と流量との二つがある。計算法が厳密ならば二つの条件は同じ結果を与えなければならぬが、近似計算であるため多少の差が出ると考えられる。そこでこれを補正する係数 m を入れた。この補正係数はまだ明らかでないが、層流の場合には計算出来るのでその検討を行なつた。この計算法によつて乱流の摩擦速度分布、流速分布、Manning の粗度係数、エネルギーおよび運動量補正係数などの計算式を導いた。

図-1 を参照して、Prandtl-Kármán の式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{u}{u_{*w}} &= \frac{1}{mK} \ln\left(\frac{y}{y'}\right) \\ \frac{u}{u_{*b}} &= \frac{1}{mK} \ln\left(\frac{z}{z'}\right) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

こゝで u_{*b} , u_{*w} は底面および壁面における局部摩擦速度を示す。 K は Kármán の一般常数である。粗面水路のとき

$$y' = \frac{R_w}{30}, \quad z' = \frac{R_b}{30} \quad (2)$$

R_w は壁面の相当粗度、 R_b は底面の相当粗度。滑面水路のとき

$$y' = \frac{11.6}{105} \frac{\nu}{u_{*w}} = 0.110 \frac{\nu}{u_{*w}}, \quad z' = 0.11 \frac{\nu}{u_{*b}} \quad (3)$$

上式の摩擦速度はそれぞれの面における平均値をとると仮定すると

$$\left. \begin{aligned} y' &= 0.110 \frac{\nu}{u_{*w}} \\ z' &= 0.110 \frac{\nu}{u_{*b}} \end{aligned} \right\} (4)$$

y' , z' はそれぞれ $u=0$ における y , z の値を示すがこのようにすると一つの

流れにおける y' , z' は境界面上で一定の値となる。

$y = y_1$ における鉛直線上の流速分布は式(1)より

$$\frac{u}{[u_{*w}]_{y=y_1}} = \frac{1}{mK} \ln\left(\frac{z}{z'}\right) \quad (5)$$

一方この鉛直線上の任意の点の速度を y 方向について考えれば

$$\frac{u}{u_{*w}} = \frac{1}{mK} \ln\left(\frac{y}{y'}\right) \quad (6)$$

y 方向から考えた共通点における流速は相等しいから式(5), (6)より u を消去すると

$$u_{*w} = \frac{[u_{*w}]_{y=y_1} \cdot \ln\left(\frac{z}{z'}\right)}{\ln\left(\frac{y}{y'}\right)} = K_1 \ln\left(\frac{z}{z'}\right) \quad (7)$$

同様にして u_{*b} を求めると

$$u_{*b} = \frac{[u_{*w}]_{y=y_1} \cdot \ln\left(\frac{y}{y'}\right)}{\ln\left(\frac{z}{z'}\right)} = K_2 \ln\left(\frac{y}{y'}\right) \quad (8)$$

式(7), (8) を式(1)に代入すると

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{u_{*w}}{mK} \ln\left(\frac{y}{y'}\right) = \frac{K_1}{mK} \cdot \ln\left(\frac{z}{z'}\right) \cdot \ln\left(\frac{y}{y'}\right) \\ u &= \frac{u_{*b}}{mK} \ln\left(\frac{z}{z'}\right) = \frac{K_2}{mK} \cdot \ln\left(\frac{y}{y'}\right) \cdot \ln\left(\frac{z}{z'}\right) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

上二式は同じものであるから $K_1 = K_2$ でなければならない。以下 $K_1 = K_2 = K$ とする。

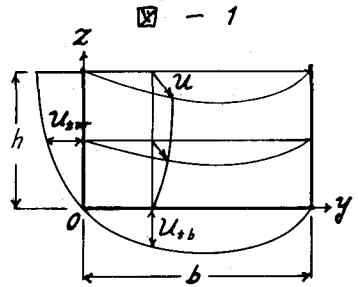
壁面の摩擦応力は $\tau_w = \rho u_{*w}^2$ であるからその平均値は

$$\bar{\tau}_w = \frac{1}{R} \int_0^R \rho u_{*w}^2 dz = \rho K \left[\left\{ \ln\left(\frac{R}{z'}\right) - 1 \right\}^2 + 1 \right] \quad (10)$$

同じく底面の摩擦応力は $\tau_b = \rho u_{*b}^2$ であるから

$$\bar{\tau}_b = \frac{2}{b} \int_0^{\frac{b}{2}} \rho u_{*b}^2 dy = \rho K \left[\left\{ \ln\left(\frac{b}{2y'}\right) - 1 \right\}^2 + 1 \right] \quad (11)$$

よつて全断面の平均摩擦応力 $\bar{\tau}$ は



$$\tau = wRI = \frac{2K\bar{u}_w + b\bar{u}_b}{2h + b}$$

従つて

$$K = \sqrt{\frac{2Ibh}{2h\left\{\ln\left(\frac{R}{\frac{R}{2}}\right)-1\right\}^2+1} + b\left\{\ln\left(\frac{b}{\frac{b}{2}}\right)-1\right\}^2+1}} \quad (12)$$

また $Q = 2 \int_0^{\frac{h}{2}} u \, dy \cdot dz$ であるから式(9)より

$$Q = \frac{Kbh}{mR} \left\{ \ln\left(\frac{R}{\frac{R}{2}}\right)-1 \right\} \left\{ \ln\left(\frac{b}{\frac{b}{2}}\right)-1 \right\} \quad (13)$$

$$\therefore K = \frac{mRQ}{bh\left\{\ln\left(\frac{R}{\frac{R}{2}}\right)-1\right\}\left\{\ln\left(\frac{b}{\frac{b}{2}}\right)-1\right\}} \quad (14)$$

さて、摩擦速度の平均値はそれを式(7), (8)より

$$\bar{u}_{zw} = \frac{1}{h} \int_0^{\frac{h}{2}} u_{zw} \, dz = K \left\{ \ln\left(\frac{R}{\frac{R}{2}}\right)-1 \right\} \quad (15)$$

$$\bar{u}_{zb} = \frac{1}{b} \int_0^{\frac{b}{2}} u_{zb} \, dy = K \left\{ \ln\left(\frac{b}{\frac{b}{2}}\right)-1 \right\}$$

壁面・底面が共に粗面のときは $\bar{u}_w$ は式(2)より決まるが、共に滑面か一方が滑面のとき滑面の部分は式(4)を粗面の部分は式(2)を用い、これと式(12)または(14)と式(15)との連立によつて求めなければならない。

Manningの粗度係数 n は

$$n = \frac{R^{1/6}}{\sqrt{g} \sqrt{2h\left\{\ln\left(\frac{R}{\frac{R}{2}}\right)-1\right\}^2+1} + b\left\{\ln\left(\frac{b}{\frac{b}{2}}\right)-1\right\}^2+1}} \quad (16)$$

流れの断面積を壁面・底面の摩擦力に比例して、それぞれ分割すれば

$$\frac{n_w}{n} = \left\{ \frac{\left\{\ln\left(\frac{R}{\frac{R}{2}}\right)-1\right\}^2+1}{\left\{\ln\left(\frac{R}{\frac{R}{2}}\right)-1\right\}^2+1 + \frac{b}{2h}\left\{\ln\left(\frac{b}{\frac{b}{2}}\right)-1\right\}^2+1} \right\}^{\frac{2}{3}} \quad (17)$$

$$\frac{n_b}{n} = \left\{ \frac{\left\{\ln\left(\frac{b}{\frac{b}{2}}\right)-1\right\}^2+1}{\left\{\ln\left(\frac{b}{\frac{b}{2}}\right)-1\right\}^2+1 + \frac{2h}{b}\left\{\ln\left(\frac{R}{\frac{R}{2}}\right)-1\right\}^2+1} \right\}^{\frac{2}{3}} \quad (18)$$

エネルギー補正係数 $\alpha = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{u}{\bar{u}}\right)^3 dA$

よつて

$$\alpha = \frac{\left\{\ln\left(\frac{b}{\frac{b}{2}}\right)-1\right\}^3 + 3\ln\left(\frac{b}{\frac{b}{2}}\right) - 3\left\{\ln\left(\frac{R}{\frac{R}{2}}\right)-1\right\}^3 + 3\ln\left(\frac{R}{\frac{R}{2}}\right) - 3}{\left\{\ln\left(\frac{R}{\frac{R}{2}}\right)-1\right\}^3 + \left\{\ln\left(\frac{b}{\frac{b}{2}}\right)-1\right\}^3} \quad (19)$$

また運動量補正係数 $\beta = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{u}{\bar{u}}\right)^2 dA$

よつて

$$\beta = \frac{\left\{\ln\left(\frac{b}{\frac{b}{2}}\right)-1\right\}^2 + 1}{\left\{\ln\left(\frac{R}{\frac{R}{2}}\right)-1\right\}^2 + 1} \quad (20)$$

層流の場合に同様な考えから、壁面および底面の摩擦力分布は

$$\left. \begin{aligned} \tau_w &= K \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{z}{h} \right\} \\ \tau_b &= K \left\{ 1 - \frac{y}{b} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

任意点の流速は

$$u = \frac{K}{m\mu} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{z}{h} \right\} \left\{ 1 - \frac{y}{b} \right\} \quad (22)$$

K を摩擦力より求めるに

$$K = \frac{6WIBh}{4h^2 + b^2} \quad (23)$$

流量より求めると

$$K = \frac{18m\mu Q}{A^2} \quad (24)$$

これらより $\frac{h}{b} = \frac{1}{2}$ のとき、これらより理論値との比較したのが図-2である。無次元流量 $Q^* = \frac{Q\mu}{WIA^2}$ とすると式(22)に(23)を用いたときの Q^* は

$$Q^* = \frac{1}{3\left(4\frac{h}{b} + \frac{b}{h}\right)m} \quad (25)$$

一方理論式は¹⁾

$$Q^* = \frac{1}{8}\left(\frac{2h}{b}\right) - \frac{32}{\pi^2}\left(\frac{2h}{b}\right)^2 \frac{1}{\pi^2} \tan h\left(\frac{\pi\pi b}{4h}\right) \quad (26)$$

$n = 1, 3, 5, \dots$ 。この二つの式から m を計算したのが図-3である。

1) K. Kimura: Characteristics of Laminar Flow through Rectangular Channel, Trans. JSCE, No. 96, 1963.

