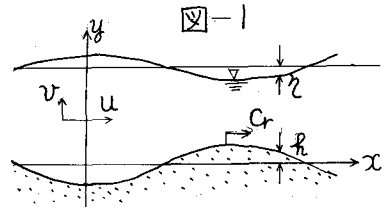
II-70 浮流を考慮した砂河床の不安定解析

東北大学工学部 正員 坂本龍雄
〃 〃 ○三王英寿

本文は水流と砂河床の境界面の波状化に対して，乱流や波の発生理論において従来用いられている不安定解析の手法に基づいた取扱いを行ない，特に河床波形頂部における移動砂の浮流化を考慮して不安定領域の変化について検討しようとするものである。

基礎方程式は，最近F. Engelund[1]の発表した方法に沿って，次のように求める。但し，ここでは河床の不安定化に関連するのは主として河床付近におけるSaltation形式の移動砂量の変動であり，局所的浮流化が河床の平坦化につながると考える。図−1に諸記号を示す。運動方程式は渦度を用いた次式による。

図−1



$$\frac{D\zeta}{Dt} = \nu \nabla^2 \zeta \text{ -----(1)} \quad , \quad \text{ここに } \zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right), \ \nu：\text{動粘性係数}$$

流速u，vを次式のように変動流関数ψを用いて表わし，渦度は(4)式で表わされる。

$$u = \bar{u} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ -----(2)} \ , \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \text{ -----(3)} \ , \quad \zeta = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \nabla^2 \psi\right) \text{ -----(4)}$$

$\bar{u}$：定常流速

(1)式に(4)式を代入して2次以上の項を省略すると次式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 \psi) + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 \psi) - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}\frac{\partial \psi}{\partial x} = \nu \nabla^4 \psi \text{ ------ (5)}$$

(5)式の解であり，流れの変動の調和成分の1つであると考えられる流関数ψを次式のように無次元化した変数分離の形でおく。

$$\frac{\psi}{\bar{U}D} = f(Y)\, e^{ikD\left(X - \frac{C}{\bar{U}}T\right)} \text{ ------(6)} \qquad \bar{U}：\text{平均流速},\ D：\text{平均水深}$$

河床形及び水面形はそれぞれ(7)，(8)式で示されるものとする。

$$h = h_0\, e^{ikD\left(X - \frac{C}{\bar{U}}T\right)} \text{ -----(7)} \ , \quad \eta = \eta_0\, e^{ikD\left(X - \frac{C}{\bar{U}}T\right)} \text{ -----(8)}$$

$$k：\text{波数} \ , \quad X = \frac{x}{D} \ , \quad Y = \frac{y}{D} \ , \quad T = \frac{\bar{U}}{D}t$$

Cは河床形の複素移動速度で，$C = C_r + iC_i$で一般に示される。

(5)式に(6)式を代入すると次のfに関する4階常微分方程式が得られ，これが不安定解析における基礎方程式となる。

$$(\bar{u} - C)\left[\frac{d^2 f}{dy^2} - (kD)^2 f\right] - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} f = \frac{\nu}{ikD^2}\left\{\frac{d^4 f}{dy^4} - 2(kD)^2\frac{d^2 f}{dy^2} + (kD)^4 f\right\} \text{ -----(9)}$$

上式に対する境界条件として，河床面及び水面における速度及びせん断力の条件を考慮して，次の4つの関係を適用する。

河床面において：$\dfrac{\partial\psi}{\partial x}=\dfrac{dh}{dt}$ -----(10) ，$u_*^2=\dfrac{(\overline{U}_b-C_r)^2}{\{1.9+2.5\ln(D/k_s)\}^2}$ -----(11)

水面において：$\dfrac{\partial\psi}{\partial x}=\dfrac{d\eta}{dt}$ -----(12) ，$u_*^2=0$ -----(13)

u_*：摩擦速度，$\overline{U}_b$：河床面におけるすべり速度，k_s：相当粗度

次に，前記のような河床面の不安定に関連する移動砂の連続方程式として次式を考える。

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial g_b}{\partial x}=-g_s \quad \text{-----(14)} \qquad \frac{\sigma}{\rho}：砂の比重 \quad \text{----(16)}$$

$$g_s=Q(\theta_0)e^{ikD(X-\frac{C}{U}T)} \text{----(15)},\quad \theta=\frac{u_*^2}{(\frac{\sigma}{\rho}-1)gd}=\frac{\nu}{(\frac{\sigma}{\rho}-1)gd}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

ここに，g_bは河床面付近の，不安定化に影響すると考えられる移動砂量，g_sは単位時間当り単位区間から出て河床の不安定化に直接関連しなくなる移動砂量とし，両者共に容積比で表わされるものである。水流による砂の輸送においては，掃流力の増加に伴なってSaltation状態の砂粒の停止時間が減少して移動砂量が増加し，更に掃流力が増加すると終局的に浮流化するとみなされている[2]。ここでは河床波形頂部から後流域にわたって掃流力に応じた浮流化が生じ，その量が河床波頂部で最大値をとり河床波形と同位相で正弦波的変動をすると仮定して(15)式によってg_sを表わす。$Q(\theta_0)$は，平均掃流力θ_0に対する，河床波頂部における浮流化砂量である。次にg_bを与えるための移動砂量式として，掃流力の比較的小さい領域でEinsteinの掃流砂関数によく近似するといわれるMeyer-Peter & Müller[3]による次式を用いる。

$$\frac{g_b}{\{(\frac{\sigma}{\rho}-1)gd^3\}^{\frac{1}{2}}}=8(\theta-0.047)^{\frac{3}{2}} \quad \text{-------(17)}$$

(7)式と(14)～(17)式からCに関する次式が求まる。

$$C=\frac{12\nu F}{h_0 D^{\frac{1}{2}}}\frac{d^{\frac{1}{2}}}{(\frac{\sigma}{\rho}-1)^{\frac{1}{2}}}(\theta_0-0.047)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+(kD)^2 f\right]-i\frac{Q(\theta_0)}{k h_0} \quad \text{-----(18)}$$

$$F=\overline{U}/\sqrt{gD} \quad ,\quad d：砂の粒径$$

(9)式を境界条件(10)～(13)の下で解いてfを求め，次に(18)式によって複素速度Cが得られる。実際にはCの値について逐次近似を行う。(9)式において$(\overline{U}-C)>0$であると考えられるから，非粘性の場合に対して特異点は生ぜず，近似解法の適用が可能である。

ここで，(7)式の関係によって，Cの虚数部分C_iの正負は河床波形の時間的増幅または減衰を表わすものである。従って，C_iが正の値をとる場合に対応する諸量間の関係によって不安定領域が示される。ここではF～(kD)の関係に対してθ_0を助変数として表示し，掃流力の影響を明らかにしようとしている。

河床波形の形成限界に対する砂の粒径の影響が，特にLower flow regimeにおいて，実験的にみられるが，これに対して上記の方法が解明の一助になると考える。

参考文献 ① F. Engelund：Instability of erodible beds, J. Fluid Mech., vol.42, 1970
② 土屋義人：掃流砂礫の流送機構，1970年度 水工学講演会講義集
③ F. Engelund & E. Hansen：A monograph on sediment transport in alluvial streams, TEKNISK FORLAG-Copenhagen, 1967