

II-68 砂礫堆の形成について

九州大学 正員 椿 東一郎

シ シ ○ 渡辺 訓甫

日本工営 シ 定村 寛文

砂礫堆の発生については、水面波によつて河床変動が誘起されるとする *Potential* 理論と、1次元解析法により河床の安定性を調べる方法とがある。前者については、林(1968)¹⁾ は掃流力の非対称性及び流れの変化に應ずる流砂量の差を取り入れ、砂礫堆について興味深い理論を展開している。また、後者については、Hansen(1967)²⁾, Callander(1969)³⁾, 鮎川(1970)⁴⁾ の研究などがある。本文は、後者の流れに沿うものであるが、かつて、2次元的な河床形態について導入した次の考え方⁵⁾

- (1) sand wave 間の流れは1波長間において加速流、減速流を繰り返し、河床剪断力が場所的に変化する。
- (2) sand wave 上の砂移動は非平衡状態にある。

を河床の3次元不安定性に拡張し、sand wave, 砂礫堆の発生機構、発生範囲などについて若干の検討を加えたものである。

1. 河床剪断応力と流砂量式及び基礎式

流速分布として2次式を用い、平均流速を u とすると、河床剪断応力 τ_b/ρ は

$$\frac{\tau_b}{\rho} = \frac{1}{\varphi^2} \left(\frac{1 - \frac{\Delta_0}{\Delta}}{1 - \Delta_0} \right)^2 \cdot u^2 \cdot \left(\frac{1 - \Delta}{1 - \frac{\Delta_0}{\Delta}} \right)^2 \quad (1)$$

と表わせる。ここに、 $\varphi = u/u_*$ 、また、 Δ は底面における velocity defect で、図-1 に示すような sand wave 上の流れにおいては、 Δ は等流時における Δ_0 を中心として $\partial h/\partial s$ (s : 底面流の方向) によって変化すると考えて

$$\Delta = \Delta_0 + a \frac{\partial h}{\partial s}, \quad \Delta_0 = \frac{b}{\varphi_0 + 2} \quad (R.F.L., h u_* / \epsilon_m \div 12), \quad \varphi = K \left(\frac{h}{\epsilon_s} \right)^\alpha \quad (2)$$

と置く。 a の値は Nikuradse による拡大管、縮小管の実験結果を参照して、 $a \div 5.0$ の程度である。

次に、非平衡状態における掃流砂の連続の式は、慣用の記号を用いて、 $\partial N/\partial s = n I_s - N/l$ であり、Einstein のモデルを用いると、上式は

$$\frac{\lambda_1 D}{A_*} \frac{\partial \Phi}{\partial s} = P - \frac{\Phi}{A_*} (1 - P) \quad (3)$$

となる。ここに、 λ_1, A_* は常数で、 $\lambda_1 \div 100, A_* \div 1/10$ の程度である。また、移動確率 P は局所的な流れの場に規定されて、掃流力の無次元表示式の関数であり、これに應ずる平衡状態の Φ の値 Φ_0 を用いて

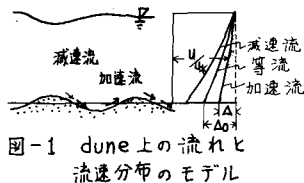
$$P = \frac{\Phi_0}{A_*} / \left(1 + \frac{\Phi_0}{A_*} \right) \quad (4)$$

から決められる。また、 Φ_0 は掃流型の流砂量式として Meyer-Peter and Miller の実験式を用いる。

$$\Phi_0 = 8 \tau_0 / \sqrt{sgD^3} = 8 (\epsilon_e - \epsilon_c)^{3/2} \quad (5)$$

ここに、 ϵ_e は有効掃流力の無次元表示で、 $\epsilon_e = \epsilon (\varphi/\varphi_0)$ 、 $\epsilon_c = \tau_0/\rho sgD$ である。

次に、勾配 $\partial h/\partial s$ なる平均河床から測った河床高さについては、空疎率入、流れ方向及び横方向の速度



成分を u, v 、その合成速度を V として

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{1-\lambda} \left\{ \frac{\partial z_T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v}{V} z_T \right) \right\} = 0 \quad (6)$$

である。また、運動方程式、連続の式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g S_0 - g \frac{\partial(h+z)}{\partial x} - \frac{\tau_b}{\rho h} \quad (7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g \frac{\partial(h+z)}{\partial y} - \frac{v}{V} \frac{\tau_b}{\rho h} \quad (8)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

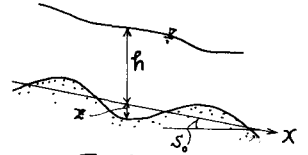


図-2

で与えられ、以上の諸式が河床の安定性、不安定性を決める基礎式である。

2. 河床の安定方程式

前章の諸量を平均値とそれからの偏りに分け、 $h = h_0(1+\eta)$, $u = U(1+u')$, $v = V(1+v')$, $z = z_0(1+\varphi')$, $\psi = \psi_0(1+\psi')$, $P = P_0(1+P')$ とおく。微小振幅波とし、微小項の2乗以上を無視すると、 $x/h_0 = X$, $y/h_0 = Y$, $z/h_0 = Z$, $t/\sqrt{gD^3} \cdot \psi_0/(1-\lambda) \cdot h_0^2 = T$ とし次式が得られる。以下、混同の恐れがないので、 u', v' のかわりに u, v とかく。

$$\left. \begin{aligned} \text{流量量の式(3)}; E \frac{\partial \varphi'}{\partial X} - (1 + \frac{\bar{\Phi}_0}{A_*}) P' + \varphi' &= 0 \\ \text{ここに、} P' &= \frac{M}{1 + \frac{\bar{\Phi}_0}{A_*}} \psi', \quad \psi' = -2\alpha\eta + 2u - g\alpha \frac{\partial \eta}{\partial X} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\text{河床高の式(6)}; \frac{\partial Z}{\partial T} + \frac{\partial \varphi'}{\partial X} + \frac{\partial v}{\partial Y} = 0 \quad (11)$$

$$\text{運動方程式(7)}; F^2 \chi \frac{\partial u}{\partial T} + F^2 \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial Z}{\partial X} + \frac{\partial \eta}{\partial X} (1 - g\alpha S_0) - S_0 (1 + 2\alpha) \eta + 2S_0 u = 0 \quad (12)$$

$$(8); F^2 \chi \frac{\partial v}{\partial T} + F^2 \frac{\partial v}{\partial X} + \frac{\partial Z}{\partial Y} + \frac{\partial \eta}{\partial Y} + S_0 v = 0 \quad (13)$$

$$\text{連続の式(9)}; \chi \frac{\partial \eta}{\partial T} + \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial v}{\partial Y} + \frac{\partial \eta}{\partial X} = 0 \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに、} F^2 &= U^2/g h_0, \quad \chi = \frac{\sqrt{g D^3} D}{U} \frac{1}{h_0} \frac{1}{1-\lambda} \frac{\bar{\Phi}_0}{U h_0} = \frac{1}{1-\lambda} \frac{g \tau_0}{U h_0}, \quad E = \frac{\lambda_1 D}{h_0} (1 + \frac{\bar{\Phi}_0}{A_*}) \\ g &= \frac{4/3}{(1-\Delta_0)(1-\Delta_0/3)}, \quad M = \frac{3}{2} \frac{\psi_0}{\psi_0 - \psi_c} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

である。河床の安定を調べるために

$$(\eta, Z, \varphi', u, v) = (\eta_*, Z_*, \varphi'_*, u_*, v_*) \cdot e^{rT + i\beta X} \quad (16)$$

とおく。 $\eta_*, Z_*, \varphi'_*, u_*, v_*$ は Y のみの関数である。式(16)を(10)~(14)に代入すると

$$\{ (i\beta)E + 1 \} \varphi'_* - M \{ 2u_* - \{ 2\alpha + g\alpha(i\beta) \} \eta_* \} = 0 \quad (a)$$

$$rZ_* + (i\beta)\varphi'_* + \frac{dv_*}{dY} = 0 \quad (b)$$

$$F^2 \chi u_* + F^2 (i\beta) u_* + (i\beta) Z_* + \eta_* \{ i\beta (1 - g\alpha S_0) - S_0 (1 + 2\alpha) \} + 2S_0 u_* = 0 \quad (c)$$

$$\{ F^2 \chi v_* + F^2 (i\beta) v_* + S_0 \} v_* + \frac{dZ_*}{dY} + \frac{d\eta_*}{dY} = 0 \quad (d)$$

$$(r + i\beta) \eta_* + (i\beta) u_* + \frac{d\varphi'_*}{dY} = 0 \quad (e)$$

式(a),(b),(c)及び(e)から η_* , S_* を求め、式(d)に代入すると、結局、Callanderと同様な式形

$$\frac{d^2 \psi_*}{dY^2} + A \psi_* = 0 \quad (17)$$

が得られる。水路幅を $2B$ とすると、 ψ_* は壁面 $y = \pm B$ ($Y = \pm b$) において0にならなければならないから、 A は正の実数であって、式(17)の解は次のようになる。

$$\psi_* = C \cos \sqrt{A} Y = C \cos n \frac{\pi}{2} \frac{Y}{b}, \quad b = B/\kappa_0 \quad (18)$$

従って、

$$A = \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2, \quad (n = 1, 3, 5, \dots) \quad (19)$$

となるが、このままでは A の式形が複雑なので、式中の各項のorderを考え、 κ 及び S_0 は $\kappa \leq 10^{-3}$, $S_0 \leq 10^{-2}$ であって、order 1の他の項に比べて、 κ は充分に無視され、 S_0 の項もかなりの精度をもて無視することができよう。このような近似を用いると、式(19)は次のようになる。

$$\frac{-\beta \{M(2+2\alpha) + rE(1-F^2)\} + i \{r(1-F^2) - \beta^2 Mga\}}{\beta \{1 + rE + 2\alpha M\} + i \{\beta^2 (E + Mga) - r\}} = \frac{(\frac{n\pi}{2b})^2}{\beta^2} = \left(\frac{n}{4} \frac{L}{B} \right)^2 = \nu^2 \quad (20)$$

ここに、 L はsand waveの波長であって、単列の砂棲堆では $n=1$ である。

3. 安定方程式の吟味

式(20)から r を求め、 $r = r_1 + ir_2$ として、実数部、虚数部を求めると、各々次のようになる。

$$r_1 = \frac{\beta^2 M}{(1-F^2+\nu^2)(\beta^2 E^2+1)} \{ga(1+\nu^2) - E\{2+2\alpha(1+\nu^2)\}\} \quad (21)$$

$$\frac{r_2}{\beta} = \frac{1}{(1-F^2+\nu^2)(\beta^2 E^2+1)} \{\beta^2 EgaM + M(2+2\alpha) + \nu^2 \{\beta^2 E^2 + 1 + M(2\alpha + \beta^2 Ega)\}\} \quad (22)$$

式(16)の表示において、 $r_1 > 0$ のとき河床は不安定であり、 η_* の進行速度は $\omega = -r_1/\beta$ で与えられるから、 $-r_1/\beta > 0$ のとき、その進行方向は流れの方向であり(dune)、 $-r_2/\beta < 0$ のとき、流れと逆の方向である(anti-dune)。(21),(22)の両式において、 $\nu = 0$ の場合が2次元河床にあたる。この場合、

$$1 > F^2 \text{ (単流) のとき, } ga > E(2+2\alpha) \text{ ならば}$$

$$r_1 > 0 \text{ (不安定) であって, } -r_1/\beta > 0, \text{ すなわち dune}$$

$$1 < F^2 \text{ (射流) のとき, } ga < E(2+2\alpha) \text{ ならば}$$

$$r_1 > 0 \text{ (不安定) であって, } -r_2/\beta < 0, \text{ すなわち anti-dune}$$

となり、2次元dune及びanti-duneの発生の可能性が裏付けられる。また、3次元河床は ν の値が大きくなる程dune領域が $F > 1$ の領域に広がってゆくことがわかる。

4. 安定・不安定の範囲

まず、 $E = \frac{\lambda_1 D}{\kappa_0} (1 + \frac{S_0}{A_*})$ を $S_0 = \kappa_0 S_0 / sD$, 及び $g_0 = U/u_*$, $S_0 = F^2/g_0^2$ を用いてかきなおして、安定不安定の境界 $r_1 = 0$ の条件を求めると、次の様に簡単な形が得られる。すなわち、

$$F = \sqrt{\frac{1+\nu^2}{2+2\alpha(1+\nu^2)}} \cdot \sqrt{\frac{s}{\lambda_1}} \cdot \sqrt{ga} \cdot g_0 \cdot \sqrt{\frac{1}{1+\frac{S_0}{A_*}}}, \quad F = \sqrt{1+\nu^2} \quad (23)$$

上式における常数は $A \doteq 5.0$, $\frac{1}{A_*} = 10$, $\lambda_1 = 100$ であり、 g, α は g_0 によって若干変化する。従って、砂 $s = \text{一定}(1.65)$ については、regimeの境界を決める F の値は g_0 をパラメーターとし、掃流力 g_0 によって変化する。図-3は2次元河床($\nu = 0$)における計算結果をGarde等が整理している資料の他

に、最近の芦田らの実験結果を含めて表示したものである。芦田らの *flat bed* の資料の一部が *anti-dune* の資料と混在し、*flat bed* → *anti-dune* への境界が明らかなでないが、一応、尤もらしい結果が得られている。図-4は3次元河床について $\varphi_0 = 8.0$ とした安定範囲と、芦田ら及び鮭川による実験結果とを示したものである。尚、鮭川の実験(X印)は $S = 0.51$ の粒子についても行なわれているので、この場合の安定範囲($\varphi_0 = 10.0$)を実線で示している。図から明かなように、砂礫堆は2次元河床の *flat bed* 及び *anti-dune* の一部が3次元河床のため *dune* 型の不安定範囲に移行した領域に発生していることがわかる。

以上のかかり粗い理論により、ある程度 regime の分類ができるが、卓越波長及び2次元あるいは3次元河床の卓越性の問題、砂礫堆における h/B の影響などについては答えることができない、などの難点が残されている。

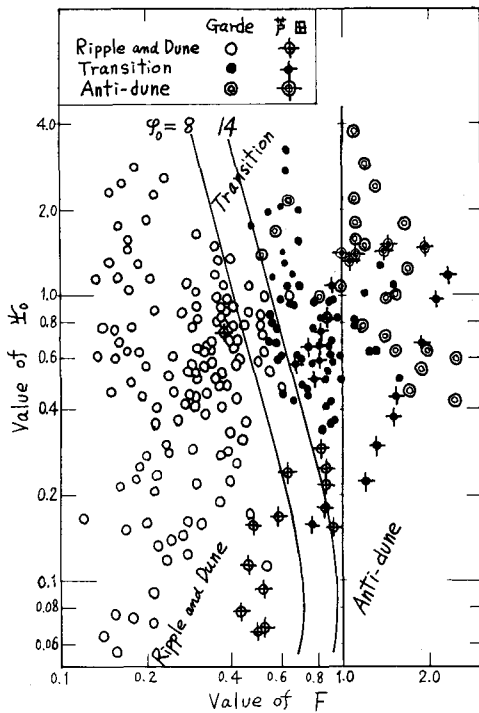


図-3 2次元河床

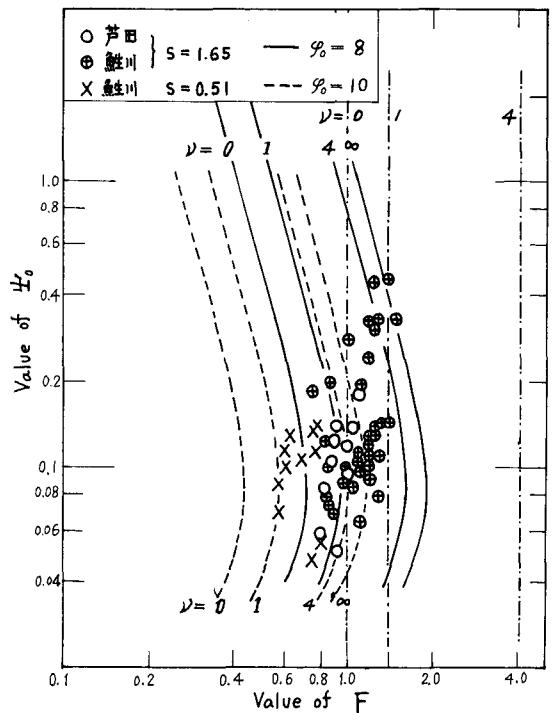


図-4 3次元河床

— 参考文献 —

- 1) 林 泰造：河川蛇行の成因についての研究，土木学会論文集，第180号，1970
- 2) E.Hansen：On the formation of meanders as a stability problem, Basic Research Progress Rep.13, Hyd. Lab., Technical Univ. of Denmark, 1967, pp.9~13
- 3) R.A.Callander：Instability and river channels, Journ. Fluid Mech., Vol. 36, 1969, pp.465~480
- 4) 鮭川 登：河川蛇行の発生限界に関する研究，土木学会論文集，第181号，1970
- 5) 橋本一郎・斎藤隆：流れによる Sand Wave の発生限界，九大工学集報，1966