

II-67 Sand wave の発生機構について

(財)電力中央研究所 正員 白砂 孝夫

sand wave の運動は形態の移動と河床表面の流動化した移動層の運動から成ってゐることに着目し、流れおよび河床表面の移動層の運動を二成層ポテンシャル流れとして表わす解析モデルを作成した。そして、sand wave を境界面に発生する内部波と考え、内部波の安定理論により2次元移動床水路における sand wave の安定領域の検討を行なった。

1. 開水路の場合

1-1 開水路の波状移動床流れ

図-1 に示すように平均水面を x' 軸に、 x' 軸に鉛直上向に y' 軸ととり流れに関する量に添字1、移動層に関する量に添字2をつける。進行速度が U_0 である波状河床 $y'_2 = a \sin m(x' - U_0 t)$ 上を流速 u_1 、水深 h_1 、水面形状が $y'_1 = b \sin m(x' - U_0 t)$ で流れる流れの複素ポテンシャル $\omega'_1 = \phi'_1 + i\psi'_1$ (ϕ : 速度ポテンシャル, ψ : 流れ関数) を $y' = 0$ で $-\partial\phi'_1/\partial y' = \partial\psi'_1/\partial x' + u_1 \partial y'_1/\partial x'$, $y' = -h_1$ で $-\partial\phi'_1/\partial y' = \partial\psi'_1/\partial x' + u_1 \partial y'_1/\partial x'$ という境界条件のもとに求めればつぎのようになる。

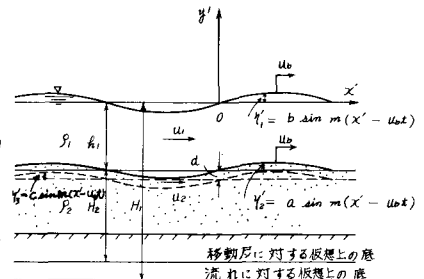


図-1 開水路移動床流れ

$$\omega'_1 = -u_1 z' - b(u_1 - U_0) \cos m(z' + iH_1 - U_0 t) / \sinh mH_1 \quad (1)$$

==に、 z' は複素変数で $z' = x' + iy'$, m は波数で $m = 2\pi/L$ (L : 波長, 2π : 円周率), t : 時間, H_1 は u_1 との関係が $u_1^2 = (g/m) \tanh mH_1$, (g : 重力の加速度) で表わされる仮想水深である。また b は水面波の振幅で河床波の振幅 a とはつぎの関係がある。

$$b/a = y'_1/y'_2 = \sinh mH_1 / \sinh m(H_1 - h_1) \quad (2)$$

一方、河床表面の厚さ d の移動層の運動の複素ポテンシャル ω'_2 は $y' = -h_1$ で $-\partial\phi'_2/\partial y' = \partial\psi'_2/\partial x' + u_2 \partial y'_2/\partial x'$, $y' = -h_1 - d$ で $-\partial\phi'_2/\partial y' = \partial\psi'_2/\partial x' + u_2 \partial y'_2/\partial x'$ という境界条件のもとに求められ。

$$\omega'_2 = -u_2 z' - a(u_2 - U_0) \cos m(z' + iH_2 + i\lambda h_1 - U_0 t) / \sinh mH_2 \quad (3)$$

==に、 H_2 は u_2 との関係が $u_2^2 = (g/m) \tanh mH_2$ で表わされる仮想移動層厚である。

今、上の座標系を x' の正の方向に U_0 の速度で動く新座標系 (x, y) で見れば sand wave は静止となり全系に U_0 のポテンシャルを加えると (x, y) 座標系も静止する。この場合の運動は流れと移動層がそれぞれ $(u_1 - U_0)$, $(u_2 - U_0)$ の速度で移動し、sand wave と水面波は定常となる。そして、この時の複素ポテンシャルは流れと移動層のそれぞれに対してつぎのようになる。

$$\omega_1 = -(u_1 - U_0) z - b(u_1 - U_0) \cos m(z + iH_1) / \sinh mH_1 \quad (4)$$

$$\omega_2 = -(u_2 - U_0) z - a(u_2 - U_0) \cos m(z + i\lambda h_1 + i\lambda H_2) / \sinh mH_2 \quad (5)$$

流れと移動層運動のそれぞれに Bernoulli の圧力方程式 $p + \frac{1}{2} \rho \mathcal{E}^2 + \rho g y = \text{const.}$ (p : 圧力, $\mathcal{E}^2$: 速度の x, y 成分の2乗和, ρ : 密度) を適用できると (4)(5) により $\mathcal{E}^2$ を求める。(波長 L に比べて波高 y が小さいとして論議をここで止めるので) $m^2 a^2$, $m^2 \lambda^2$ は小で無視すると $\mathcal{E}_1^2$, $\mathcal{E}_2^2$ はそれぞれ $\mathcal{E}_1^2 = (u_1 - U_0)^2 \{ 1 - 2m y_1 \cosh m(y + H_1) / \sinh mH_1 \}$, $\mathcal{E}_2^2 = (u_2 - U_0)^2 \{ 1 - 2m y_2 \cosh m(y + h_1 + H_2) / \sinh mH_2 \}$

となる。Bernoulli の方程式により境界面 $y = -h_1 + y_2$ における圧力 p_1, p_2 を求め、 p_1 の式に $y_1 = y_2 \sinh m H_1 / \sinh m (H_1 - h_1)$ を代入し、 $p_1 = p_2$ とおけば次式を得る。

$$\frac{1}{2} p_1 (u_1 - u_2)^2 \{1 - 2m y_2 \coth m (H_1 - h_1)\} + p_1 g y_2 - \frac{1}{2} p_2 (u_2 - u_2)^2 \{1 - 2m y_2 \coth m H_2\} - p_2 g y_2 = \text{const.} \quad (6)$$

を得る。変数 y_2 の係数は 0 となることから u_2 に関する 2 次の方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \{-p_1 m \coth m (H_1 - h_1) + p_2 m \coth m H_2\} u_2^2 + 2\{p_1 u_1 m \coth m (H_1 - h_1) - p_2 u_2 m \coth m H_2\} u_2 \\ & - \{p_1 u_1^2 m \coth m (H_1 - h_1) - p_2 u_2^2 m \coth m H_2 + (p_2 - p_1) g\} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

1-2 各種 sand wave の安定領域および実験結果との比較

安定な sand wave が存在するのは (7) で与えられる u_2 の実根が存在する範囲である。また sand wave の分類は Kennedy³⁾ の定義に従って水面形状と河床面形状とが逆位相 (2) 式の値が負) になるものを dune, 同位相 (2) 式の値が正) になるものを antidune, 安定な sand wave が存在しない時には flat bed とする。2 式の根の判別式 D は $\coth m (H_1 - h_1) = (1 - m h_1 F_1^2 \tanh m h_1) / (m h_1 F_1^2 - \tanh m h_1)$ であることと考慮すれば

$$\begin{aligned} D = & \left\{ \frac{1}{(m h_1 F_1^2 - \tanh m h_1)^2} \right\} \left\{ p_1 u_1 m (1 - m h_1 F_1^2 \tanh m h_1) - p_2 u_2 m \coth m H_2 (m h_1 F_1^2 - \tanh m h_1) \right\}^2 \\ & + \left\{ -p_1 m (1 - m h_1 F_1^2 \tanh m h_1) + p_2 m \coth m H_2 (m h_1 F_1^2 - \tanh m h_1) \right\} \times \left\{ p_1 u_1^2 m (1 - m h_1 F_1^2 \tanh m h_1) \right. \\ & \left. - (p_2 u_2^2 m \coth m H_2 - p_2 g + p_1 g) (m h_1 F_1^2 - \tanh m h_1) \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

となる。移動床の速度 u_2 の大きさの評価はむづかしいが一応流速より小さな量として $u_2 = \alpha u_1$ とおけば、 $\coth m H_2 = g / m u_2^2 = g / m \alpha^2 u_1^2 = 1 / m h_1 \alpha^2 F_1^2$ を用いれば、(8) 式は、

$$D = -(\alpha^2 - 4\alpha + 2) \tanh m h_1 (m h_1)^2 F_1^4 + (\alpha - 2) m h_1 F_1^2 - 2 \tanh m h_1 / (m h_1 F_1^2 - \tanh m h_1) \quad (9)$$

となる。ここに D の符号に關係のない係数は省略した。

(9) 式で判別するには α, p_1, p_2 の値が与えられる必要がある。本件のように砂の河床上に水が流れる場合には $p_1 = 1, p_2 = 2$ にとれば大きな誤りはないと思われる。 p_2 を 2 としたのは河床砂の比重を 2.65, 空隙率を 0.4 とすれば水中の移動床の見かけの密度がほぼ 2 となるからである。一方 α の値には不明な点が多くどのように評価するかは問題であるが、移動床とその下の静止床の限界が明確でなく移動している床より深くまで流動化しているのではないかと考えられることから、 α の値として

移動床粒子の移動速度から判断されるものよりは小さい値とするのが適当ではないかと思われる。

図-2 は $\alpha = 0.04$ として (9) 式により sand wave の安定領域を求め、(8) 式により sand wave の種類を判別し波数と水深の積 $m h_1$ とフルード数 F_1 で表わされる平面に図示したものであり、図中の点線は (8) 式の 2 根のうち小さい方をとった sand wave の等速度線である。これによれば dune, 遷移領域の flat bed, antidune, 不安定領域の flat bed が明確に識別され、林が導いた理論結果とも領域がおおむね一致している。また等速度線を見れば、dune の領域では sand wave の進行速度 u_b は常に正、すなわち下流に進行するものであるが antidune の領域の一部には u_b が負するものがある。sand wave が土流に進行する領域がある。以上の結果は一般的に認められていたような水路の

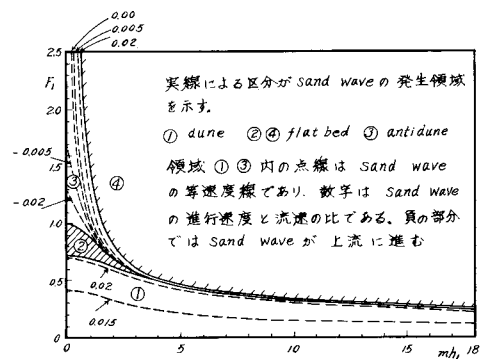


図-2 開水路の sand wave 発生領域 ($\alpha = 0.04$)

sand wave の特性をよく表わしてゐる。

図3は Kennedy³⁾ によつて集録された実験結果に著者の実験、実測結果を追加し、著者の理論領域と比較したものである。理論領域は実験結果とかなりより一致を示してゐると思ふ。しかし一方では遷移領域の flat bed の判別が明確でないこと、上流に歪み antidune の領域の検定がなされてゐるに似とおよび理論的には mh_1 が大きい領域にも antidune が安定するフルード数があるが実験では確認されていないなどの欠点を持つがこれらの点の究明は今後の課題としたい。

2. 管路の場合

2-1 管路の波状移動床流れ

図4に示すように上下面とも固い水平な壁面で行まれた管路移動床水路の場合について考える。流れと河床の境界面に x 軸を x 軸に鉛直上向に y 軸をとる。(以下で用いる記号は開水路の場合と同じである。) 開水路の場合と同様、移動速度が u_0 の波状河床 $y = a \sin m(x - u_0 t)$ 上で流速 u_1 、深さ h_1 で流れる流れの複素ポテンシャル $\omega = \phi' + i\psi'$ を $y' = -h_1$ で $-\partial\phi'/\partial y' = 0$, $y' = 0$ で $-\partial\phi'/\partial y' = \partial y'/\partial x + u_1 \partial y'/\partial x'$ とする境界条件のもとに求めればつぎのようになる。

$$\omega_1' = -u_1 z' + a(u_1 - u_0) \cos m(z' - i h_1 - u_0 t) / \sinh m h_1 \quad (10)$$

一方、河床表面の移動及び運動の複素ポテンシャルは開水路の場合と同様になつてゐる。

$$\omega_2' = -u_2 z' - a(u_2 - u_0) \cos m(z' + i h_2 - u_0 t) / \sinh m h_2 \quad (11)$$

ここに h_2 は h_1 との関係が $u_2^2 = (g/m) \tanh m h_2$ で表わされる仮想移動床厚である。開水路の場合と同様に上の系を x' の正の方向に u_0 の速度で動く新座標 $(x-y)$ 上で定常化してみると複素ポテンシャルは流れと移動床の運動のそれぞれに対してつぎのようになる。

$$\omega_1 = -(u_1 - u_0) z + a(u_1 - u_0) \cos m(z - i h_1) / \sinh m h_1 \quad (12)$$

$$\omega_2 = -(u_2 - u_0) z - a(u_2 - u_0) \cos m(z + i h_2) / \sinh m h_2 \quad (13)$$

(12), (13) により流速成分の 2 乗和 g_1^2, g_2^2 を求め流れと移動床の境界面において圧力が等しいとあけがし開水路の場合と同じ手法により u_0 に関する 2 次の方程式が得られる。

$$(p_1 \coth m h_1 + p_2 \coth m h_2) u_0^2 - 2(p_1 u_1 \coth m h_1 + p_2 u_2 \coth m h_2) u_0 + (p_1 u_1^2 \coth m h_1 + p_2 u_2^2 \coth m h_2) + (g_1^2 / m)(p_1 - p_2) = 0 \quad (14)$$

2-2 管路の sand wave の安定領域および開水路の場合との比較

u_0 に関する 2 次の方程式 (14) の根の判別式 D は

$$D = (p_2 - p_1)(p_1 \coth m h_1 + p_2 \coth m h_2) / g_1 m - (u_1 - u_0)^2 p_1 p_2 \coth m h_1 \coth m h_2 \quad (15)$$

となる。開水路の場合と同じく $u_2 = \alpha u_1$, $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $\coth m h_2 = 1/mh_1$ と代入して D の符

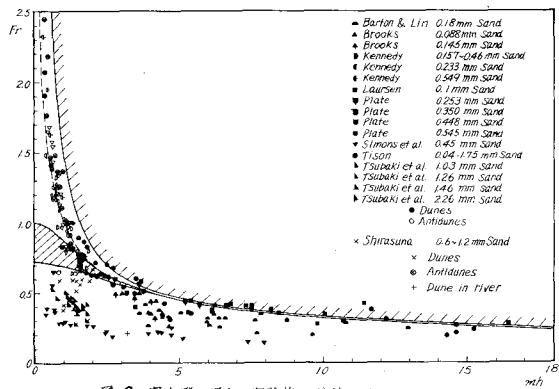


図-3 開水路の場合の実験値との比較 ($\alpha = 0.04$)

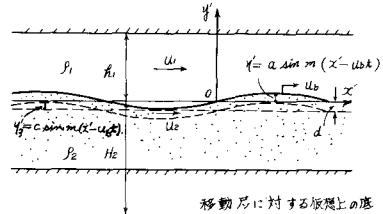


図-4 管路移動床流れ

号に關係のない係数を省略すると判別式はつぎのようになる。

$$D = F_1^2 - 2 \tanh kh_1 / \{(1-2)^2 - 2\} m h_1 \quad (6)$$

図5は $\alpha = 0.04$ について sand wave が安定する領域と不安定な flat bed となる領域を求め $F_1 \sim m h_1$ 平面に図示したものである。図6は開水路と管路の sand wave の特性を比較するために、いずれも $\alpha = 0.3$ の場合について同一平面に示したもので開水路は実線で管路は太い点線で示されている。 $\alpha = 0.04$ の場合(図2と図5)と $\alpha = 0.3$ の場合(図6)を見ると管路、開水路いずれの場合も α が大きい方が sand wave の安定領域も広くなっている。さらに α の値が同一である場合安定領域は、 $m h_1$ の大きな範囲では開水路と管路で一致しているが、 $m h_1$ が小さくなるにつれ、いずれもフルード数の範囲は広がるが、開水路の場合は急激に大きくなり用いた状態となり、管路の場合はゆるやかにある値に近づき閉じこ。また開水路には、dune, 遷移領域の flat bed, antidune, 不安定領域の flat bed などがあるが、管路の場合には安定か不安定から区別できない。これ

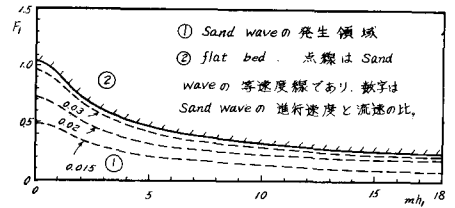


図-5 管路の Sand wave 発生領域 ($\alpha = 0.04$)

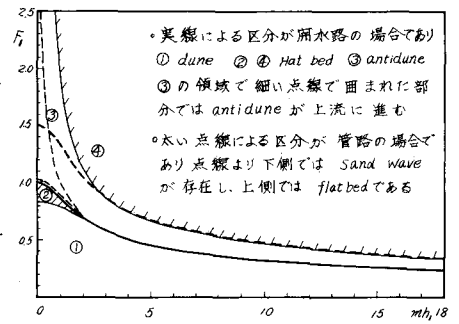


図-6 開水路、管路 各場合の比較 ($\alpha = 0.3$)

れを現象面から見れば、開水路の場合、平坦な河床からフルード数を漸次あげていくと dune $\rightarrow$ 遷移領域の flat bed $\rightarrow$ antidune $\rightarrow$ 不安定領域の flat bed と進むのに対し、管路の場合、安定領域の dune に当てはまるものから直接不安定領域の flat bed に移行するようになる。また、図5の点線は sand wave の等速度線を示したものであるが、いずれの値も常に正であり、上流に進行するものはない。

以上のことから管路の sand wave には開水路の dune に相当するものがないと考える。こゝでの理論結果は実験的に検証されておらず今後の課題としたい。

以上、sand wave を2成層流の境界面に発生する内部波と考え、sand wave の特性を検討してきたが、得られた結果は従来から実験によって確かめられていた諸特性とよく一致した。しかし、以上の結果は、sand wave が安定かどうかの条件で与えるのみで発生、発達機構については説明することができない。実際にはスケールの大きい乱れ速度などによって引き起された河床の起伏が土の条件に対して安定であれば消えずに河床表面に残り、それが逆に平均流の流線を変化させ流れと河床の相互作用によりつぎつぎと安定な sand wave を形成していくものと考えられ、これを表現する解析モデルの作成は引続いての課題である。また、以上の検討の結果、sand wave で流れと河床の移動から成る2成層流の境界面における内部波として取扱う見通しが得られたものと考えられるので、内部波(sand wave)のエネルギー消費と流れの抵抗則との関連と移動床の現象と内部波理論により統一的に解釈していくことも今後の課題としたい。

- 参考文献 1) かわくは、自研考天、各種 sand wave の発生領域に関する研究、電中研技2研報 No. 700/3 '77年4月
2) Milne-Thomson, L.H.: Theoretical Hydrodynamics 4th ed. Macmillan, London 1962.
3) Kennedy, J.F.: The mechanics of dunes and antidunes in erodible bed channels, J. Fluid Mech. Vol. 16 pt 4 Aug. '63
4) 林泰彦, 川上史己: 移動河床に生ずる二、三の不安定現象, 第18回水理講演会講演集 '69年2月