

1. まえがき

弾性理論にもとづく骨組構造物の最適設計法として、これまでに種々の数値計画法の適用が試みられているが、本論文は反復線形計画法 (SLP法)、無制限最小化反復法 (SUMT法) および勾配法 (GM法) をトラス構造物の最適設計問題に適用した場合について、その結果の比較、各解法の特長および問題点を明らかにしようとするものである。

2. 各解法の概要

いま、構造物の最適設計問題を

$$G_j(X) \leq 0 \quad (j=1, \dots, n) \quad (1)$$

の制約条件のもとで目的関数

$$M = F(X) \quad (2)$$

を最小とする問題と定義する。ここに、設計変数: $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ であり、 $G(X)$, M ともに X の線形または非線形の関数であるとする。

2-1) SLP法 この方法は、構造物の非線形な最適設計問題を設計変数 (X^1) に関してテーラー展開し、次のような ΔX^1 に関する線形な最適問題に近似させ、線形計画法の手法を用いて最適な ΔX^1 を求め、 $X^2 = X^1 + \Delta X^1$ として計算をくり返し、最適解を求める方法であり、その詳細についてはこれまでに度々報告しているので^{1) 3)} 省略することとする。

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \nabla F \cdot \Delta X \quad (3) \\ &\text{subject to} \quad \left. \begin{aligned} X_u - X^1 &\geq \Delta X^1, & X_l - X^1 &\leq \Delta X^1 \\ \{S^1 - D_u^1\} \Delta X &\geq Y_u^1 - Y^1, & \{S^1 - D_l^1\} \Delta X &\leq Y_l^1 - Y^1 \end{aligned} \right\} \quad (4) \end{aligned}$$

ここに S, D_u, D_l は $S_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j}$, $D_{uij} = \frac{\partial y_{ui}}{\partial x_j}$, $D_{lij} = \frac{\partial y_{li}}{\partial x_j}$ よりなる $n \times m$ 次のマトリックスである。また、 $Y = (y_1, \dots, y_n)$ は構造物の状態変数を表わし、サフィックス l および u は、それぞれ許容値の下限および上限を表わす。

2-2) SUMT法 この方法は、最適問題の制約条件式の逆数または対数関数あるいは二乗関数などを罰金関数とし、これに重みづけ (r) を行なって目的関数に加え1つの無制限最小化関数を作成し、罰金関数の重み (r) を減少 (または増大) させながら無制限最小化関数を最小化することにより最適解を求める方法である。本研究においては、無制限最小化関数として制約条件式の逆数を罰金関数とする次式を用いた。

$$P(X, r) = F(X) - r \sum_{j=1}^n \frac{1}{G_j(X)} \quad (5)$$

また、上記の最小化関数 (P 関数) の r の各値に対して局所的最小値を求める方法として、Variable Metric 法を用いた。この方法は、 P 関数の一次の微係数 ($\nabla P(X^{i+1}, r) = g^i$) を用いて次式より二次の微係数マトリックスの逆マトリックス (H^{i+1}) を求め、

$$H^{i+1} = H^i + \frac{(\sigma^i)(\sigma^i)^T}{(\sigma^i)^T \Delta g^i} - \frac{H^i (\Delta g^i) (\Delta g^i)^T H^i}{(\Delta g^i)^T H^i \Delta g^i} \quad (6)$$

$$\text{これを用いて、} \quad P(X^{i+2}, r) = \min_x P(X^{i+1} - \alpha H^{i+1} g^{i+1}, r) \quad (7)$$

となる x^{i+2} を求めるものである。

$$\text{ここに } \Delta g^i = \nabla P(x^{i+1}, r) - \nabla P(x^i, r), \quad \sigma^i = -\alpha H^2 g^i$$

また、 α の決定法としては張り出し法を用いた。

2-3) GM法

この方法は、目的関数が減少する方向に設計変数を改良してゆけば、いつかは目的関数の最小点に到達するであろうとの考えにもとづいて展開された解法である。いま、実行可能領域内の任意の点 x を考えると、この点における目的関数の減少率が最大となる方向は、その勾配 (Gradient) の方向である。したがって、設計変数の値が実行可能領域内にある場合には、目的関数の勾配 ($\nabla F(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x}$) の方向にそって設計変数を改良してゆけばよい。ところが制約条件のなす境界面では、設計変数を常に目的関数の勾配の方向 (∇F) に改良できるとは限らず、制約条件を満足し、かつ目的関数を最大に減少させる方向を決定しなければならない。この方法として、“Good Feasible Direction 法” や “Gradient Projection 法” などが提案されているが本研究においては、この方向を決定する方法として、

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial G_j(x)}{\partial x_j} \cdot U_j = \tau < 0 \quad (i \in I_1) \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} 0 < U_j &\leq 1 & (j \in J_1) \\ -1 \leq U_j &\leq 1 & (j \in J_2) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\text{の制限のもとに } \nabla F(x) \cdot U \quad (10)$$

を最小とする U を求め、この U にそって設計変数を変化させるものとした。ここに $I_1 = \{i | G_i(x) = 0\}$, $J_1 = \{j | x_j = 0\}$, $J_2 = \{j | x_j > 0\}$ である。式-(8), (9), (10) は、 U_j ($j = 1, 2, \dots, m$) に関する線形な最適問題であり、線形計画法の手法を用いて容易に解くことができる。この U を用いて、

$$x^{s+1} = x^s + \varepsilon U \quad (11)$$

とし、 $G_j(x^{s+1}) \leq 0$ ($j = 1, \dots, n$) の条件のもとに $F(x^{s+1})$ を最小にする ε を求める。このようにして x^{s+1} が再び境界線上に達すれば、その点を x^s とし、上記の計算をくり返すことによって最適解を求めるものである。

3. 適用例

上記の方法を図-1に示すトラス構造物の最適設計に適用した結果を次に示す。このトラスの設計変数として部材1,2の断面積 A_1, A_2 を考え、制約条件式として各部材の最大許容応力度に関するものおよび格点1の x, y 軸方向の変位を 6 mm に制限する制約条件を考慮した。ただし最大許容応力度に関してはトラス部材の Sub-optimization による最大許容応力度-断面積の関係式¹⁾

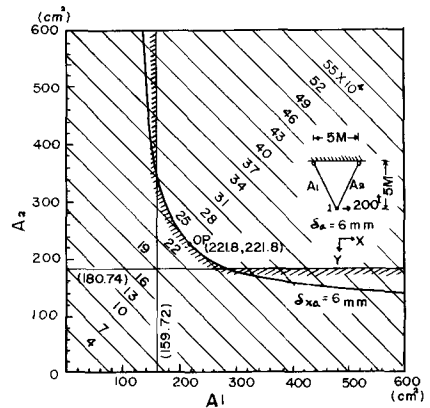


FIG. 1

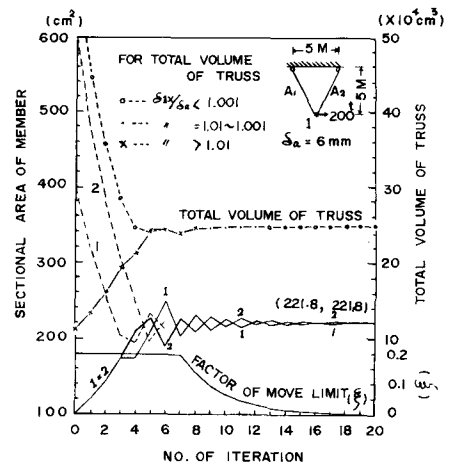


FIG. 2

を用いているので、部材に関して設計上要求される全ての制約条件式を考慮していることとなる。また目的関数としてトラスの使用材料の全容積を考えた。

図-1は、この最適設計問題の実行可能領域および目的関数の等値線を示す。この図より明らかなように、この最適問題では格点1のx方向の変位の制約条件が最も支配的な制約条件となり、最適解は $A_1 = A_2 = 221.8 \text{ cm}^2$ であることがわかる。図-2はSLP法により部材断面の初期値として、 $A_1 = 400 \text{ cm}^2$ 、 $A_2 = 600 \text{ cm}^2$ および $A_1 = A_2 = 100 \text{ cm}^2$ として最適解を求めた結果を示している。設計変数の変化量 Δx の値を ξ により制限することにより、実行可能領域の内側あるいは外側から容易に最適解に近づき、いずれも20回のくり返し計算後最適解に達した。

図-3, 4, 5はSUMT法において $R = 100000$, 10000, 10 の場合の無制限最小化関数の等値線および最適解を示したものである。罰金関数の重み(R)の値により最適解が大きく異なることが認められる。この例では $R = 0.014$ で最適解 $A_1 = A_2 = 221.9 \text{ cm}^2$ を得た。SUMT法においては、最適解へ収斂させるために要する計算のくり返し数および最適解に対する近似の精度は、無制限最小化関数の R および張り出し法における α の選び方に大きく左右され、その選択がきわめてむづかしく、 R の値によっては最適解に収斂させるためにきわめて多くの計算を必要とすることもあり得る。さらに計算の途中において R の各値における無制限最小化関数の最小値を確認した後 R を減少させないと最適解への収斂がおそくなる。

図-6は部材断面積の初期値として $A_1 = 400 \text{ cm}^2$ 、 $A_2 = 700 \text{ cm}^2$ を与えた場合、GM法により最適解に収斂してゆく過程を示したものである。図にみると実行可能領域内においては、設計変数は目的関数が最大に減少する方向、すなわち目的関数の等値線に直角の方向に変化してゆき、制約条件の境界線に達すると式-(8), (9), (10) によって最適の変化の方

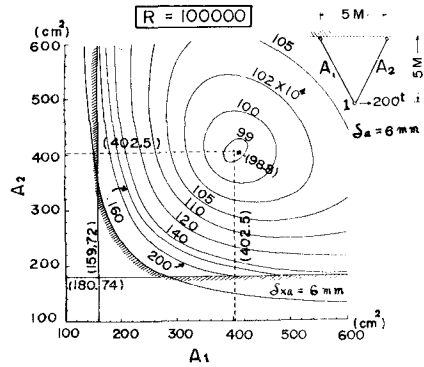


FIG. 3

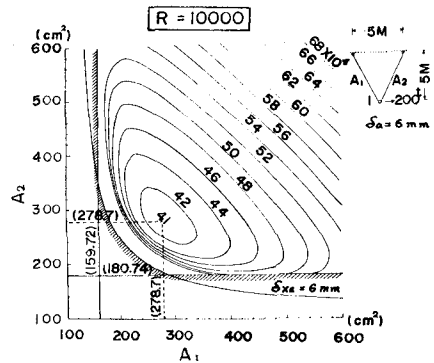


FIG. 4

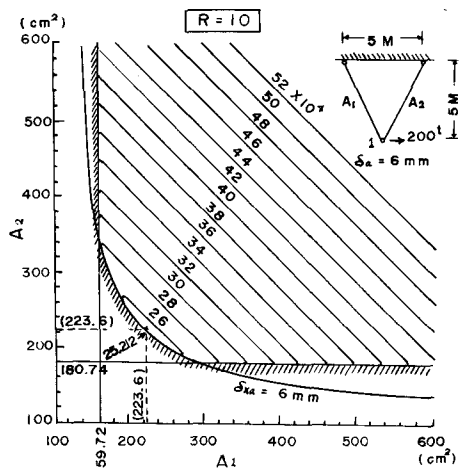


FIG. 5

向が定まり以下境界線上にそって最適解に収斂している。
 この場合、変数の変化の方向(U)は式-(8)の u の値によって変化する。 u の値が適当でないとき λ の値が振動し最適解に収斂しない。理論的にはこの u の絶対値が小さければ小さいほど制約条件にそって変化することとなるが、 u が小さければそれだけ式-(8),(9),(10)によって定めるべき方向の数も多くなる。本研究においては、 $|u|$ の値として式-(8)の左辺の係数のうち最小のものの $\frac{1}{T}$ (ただし $T>1$)を用い、最適解の近傍においては、この T の値を大きくしてゆくことにより図-6に示すごとく最適解に達した。なお各段階における U および T の値を図-6に示す。

4. 各方法の特長および向題点

3で示した例は、設計変数が2個、制約条件式が4個のきわめて簡単な例であるが、これまでの研究の結果¹⁾²⁾をも考慮し、SLP, SUMT, GMの各法を比較して次のことがいえる。

- 1) SLP法は設計変数の初期値としていかなる値をもとり得るが、SUMT法、GM法においては初期値として実行可能解が必要である。したがって、SUMT法およびGM法が一般的なプログラムであるためには、さらに実行可能初期値を得るプログラムを必要とし、このAlgorithmとしてSUMT法の初期値の決定法を用いることができる。²⁾³⁾
- 2) いずれの方法も制約条件式および目的関数の1次の微係数を利用してくり返し計算を行なうことにより最適解を求めているが、計算手順はSLP法が最も単純であり、ついでGM法、SUMT法の順で複雑となる。また非線形の最適問題をGM法により解く場合、本研究で用いた式-(8),(9),(10)の方法により比較的容易に λ の改良方向を決定できることが明らかとなった。
- 3) 最適解を能率よく収斂させるためには、SLP法において λ 、SUMT法において ρ および μ 、GM法において T および ϵ と、それぞれくり返し計算の結果の状態によりその大きさを判断し、調整しなければならない係数を有する。またこれらの大きさが適当でない場合には、最適解に収斂しないこともあり得る。最適解への収斂はSLP法が他の解法に比べてきわめて良好である。
- 4) SLP法では、くり返し計算の途中において必ずしも実行可能解が得られるとは限らない。しかしSUMT法およびGM法においては確実に実行可能解が得られる。
- 5) いずれの方法も局所的最小点を求めるAlgorithmであり、全体的最小点を求めるためには、初期値を種々変化させ、同一の解が得られるか否かを確認する必要がある。

参考文献

- 1) 大久保禎二, "トラス構造物の最適設計法に関する研究", 土木学会論文報告集, 第177号, 1970年5月
- 2) 大久保禎二, "SUMTによる構造物の最適設計法に関する研究", 土木学会中国四国支部第22回学術講演会一般講演概要集, 1970年7月
- 3) 大久保禎二, "骨組構造物の最適設計", 土木学会関西支部「構造物設計法の最近の進歩と向題点」講習会テキスト, 1971年3月

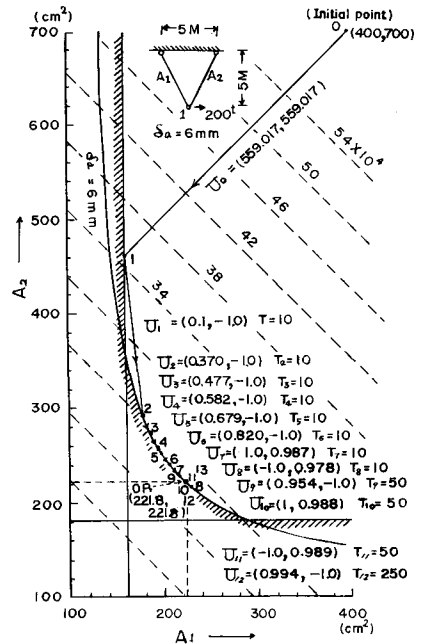


FIG. 6