

I-198 深梁の立体解析

本州四国連絡橋公団 正員 ○多田浩彦
 本州四国連絡橋公団 正員 井根勝重
 大阪設計コンサルタンツ 正員 吉田公寛

1. 概要

本州四国連絡橋下部構造のような巨大な構造物では、図-1に示すような深い梁を有する格子構造が主要な構成断面となることが多い。ここでは、そのような格子深梁についてScheibe理論および格子理論を併用した立体解析法を導き、数値計算例を付して面内変形を生じる深梁の力学的特性を調べようとしたものである。

2. 解式

図-1に示す構造体のA桁の1つを取出してみると、この桁を構成する各部材に作用する外力系は図-2のように分解して表示することができる。図において $P(x)$ は構造体に作用する外荷重であり、フランジ(1)を介して直接ウェブ(2)に作用するものとする。また、 $S(x)$ 、 $S'(x)$ はフランジ(1)、(3)とウェブ(2)の接合面に作用する拘束剪断力であり、 $S(y)$ はB桁との接合面に作用する鉛直方向剪断力である。A桁を構成する3つの部材は、このような載荷を受けるScheibeとみなして解析することができる。

次に、各接合面および境界における条件を列記する。

(1) 部材(1)と部材(2)の接合面($z = \frac{b'}{2}$, $y = 0$)および部材

(3)と部材(2)の接合面($z = -\frac{b'}{2}$, $y = b$)において、部材(1)、

(3)の x 方向変位は部材(2)のそれとは等しい。

(2) B桁との接合面($z = \frac{b'}{2}$, $x = c$ および $z = -\frac{b'}{2}$, $x = a - c$)において、A桁の y 方向変位とB桁のそれとは等しい。

(3) 部材(1)、(3)で($z = 0$)および($z = b'$)において $\sigma_z = 0$, $\tau_{xz} = 0$
 ($z = 0$)および($x = a$)において $u_z = 0$, $u_x = 0$

(4) 部材(2)で ($x = 0$)および($x = a$)において $u_z = 0$, $u_y = 0$
 ($y = 0$)において $k\sigma_y = Px$ $k\tau_{xy} = S(x)$
 ($y = b$)において $\sigma_y = 0$ $k\tau_{xy} = S(x)$ (1)

これらの境界条件を満足する解式をFourier級数を用いて導くことにする。また、この解式中で、Scheibeの任意点に任意大きさの水平剪断力が作用する場合の基礎偏微分方程式は次式で与えられるものとする。

$$k\Delta\phi = \nu \left\{ \frac{\partial}{\partial x} S_x + \frac{\partial}{\partial y} S_y \right\} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int S_x dx - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int S_y dy \quad (2)$$

ここに k : 板厚 ν : Poisson's ratio

図-1

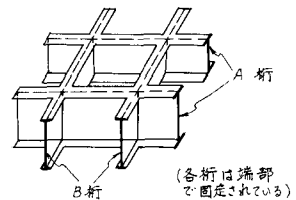
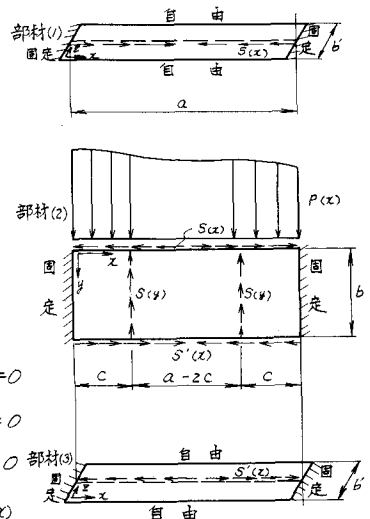


図-2



2.1 ウェブ部分の解式の誘導

解析の便宜上、ウェブ(2)の荷重系を図-3に示すような y 方向に正対称形と逆対称形に分離して考え、後に重ね合わせることにする。

(1) x 方向正対称、 y 方向逆対称形の解式

図-3 (1)逆対称形の

解式を導くにあたり、これをさらに図-4に示す2つの荷重状態に分離して考える。

(i) 外荷重(g_x)による時

図-4 (1)における外力 g_x, S_x を次の級数で

表わす。

$$g_x = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} a_n \cos \alpha_n x + g_0 \quad (3)$$

$$S_x = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} b_n \sin \alpha_n x \quad (4)$$

$$\text{ただし } \alpha_n = \frac{n\pi}{a}$$

応力関数 ϕ を次のように与える。

$$\phi = \phi_1 + \phi_2$$

上式中、 ϕ_1 は特解であり代数式で、 ϕ_2 は補足解であり Levy 解で表わすことにすれば、境界条件から次式のように導くことができる。

$$\phi_1 = \frac{g_0}{2b} \left\{ x(a-x)(b-2y) + \frac{1}{3}(b-2y)^3 \right\} \quad (6)$$

$$\phi_1' = \frac{-g_0}{6b^3} \left\{ (a^2 - 6ax + 6x^2)(b^2y - 3b^2y^2 + 2y^3) + a^4(b^2y - 10b^2y^3 - 15by^4 - 6y^5) \right\} \quad (7)$$

$$\phi_2 = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left[A_n (\sin \alpha_n y - \Gamma_n \cos \alpha_n y) + C_n \{ \Lambda_n \cos \alpha_n y + \Delta_n y (\sin \alpha_n y - \Delta_n \cos \alpha_n y) \} \right] \cos \alpha_n x \quad (8)$$

$$\text{ただし } \Gamma_n = \tan \alpha_n \frac{\lambda \pi}{2}, \Delta_n = \cot \alpha_n \frac{\lambda \pi}{2}, \Lambda_n = -\frac{\lambda \pi}{\sin \alpha_n \lambda \pi}$$

(ii) 横析接合面剪断力(S_y)による時

図-4 (2)において S_y は図-5に示すように細分された矩形分布に近似し各分割荷重の中心点で格子結合条件を満たすものとする。また

$$S_{x2} = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \widetilde{b}_n \sin \alpha_n x \quad (9)$$

で表わす。応力関数を次のように与える。

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3$$

上式中 ϕ_1 は(2)式を満足する2重級数で表わされた特解であり、 ϕ_2, ϕ_3 は $4\phi = 0$ を満足する補足解であって ϕ_2 は代数式、 ϕ_3 は Levy 解で表わされ、それぞれ次式のように導くことができる。

$$\phi_1 = \frac{64\lambda^2 a^3}{\lambda \pi^5} \sum_{j=1}^K t y_j \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{(V \alpha^2 - \lambda^2 m^2)}{m n^2 (\lambda^2 m^2 + n^2)^2} \ln \cos \beta n y \Lambda_m \cos \alpha m x + \frac{32 C_i V \lambda^2 a^2}{\lambda \pi^4} \sum_{j=1}^K t y_j \sum_{i=1,3,5}^n \frac{1}{n^4} \ln \cos \beta n y \quad (11)$$

$$\phi_2 = \frac{-4 C_i}{\lambda a b} \sum t y_j d_j \left\{ x(a-x)(b-2y) + \frac{1}{3}(b-2y)^3 \right\} + \frac{1}{6 b^3} \left\{ (a^2 - 6ax + 6x^2)(b^2y - 3b^2y^2 + 2y^3) + \frac{32 C_i}{\lambda a} \sum_{j=1}^K t y_j d_j (b^4y - 10b^2y^3 + 15by^4 - 6y^5) \right\} \quad (12)$$

$$\phi_3 = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left[A_n (\sin \alpha_n y - \Gamma_n \cos \alpha_n y) + C_n \{ \Lambda_n \cos \alpha_n y + \Delta_n y (\sin \alpha_n y - \Delta_n \cos \alpha_n y) \} \right] \cos \alpha_n x \quad (13)$$

図-3

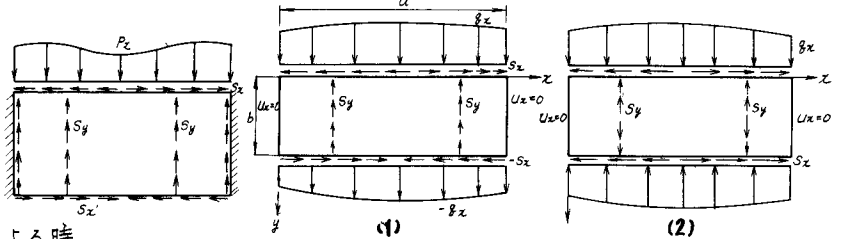


図-4

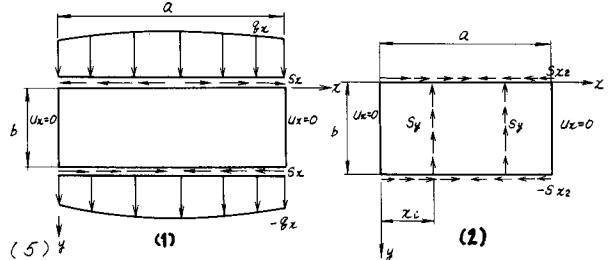
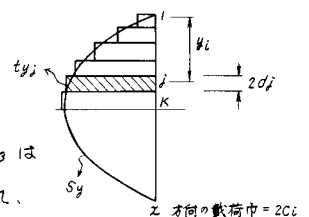


図-5



$$\begin{aligned} \text{ここで } \alpha_m &= \frac{m\pi}{a} & \beta_n &= \frac{n\pi}{b} & \lambda &= \frac{\phi}{a} & \alpha_m &= \cos \alpha_m x_i \sin \alpha_m c_i & \alpha_n &= \sin \beta_n y_i \sin \beta_n d_j \\ \Gamma_m &= \tan \kappa \frac{\lambda m \pi}{2} & \Delta_m &= \cot \kappa \frac{\lambda m \pi}{2} & \Lambda_m &= -\frac{\lambda m \pi}{\sin \kappa \lambda m \pi} \\ L_m &= \cos \alpha_m x_i \sin \alpha_m c_i & L_n &= \sin \beta_n y_i \sin \beta_n d_j \end{aligned}$$

ただし、荷重位置； (x_i, y_i) 荷重面積； $2c_i \times 2d_j$

なお、(11)式で示す2重級数は総和公式を用いて x の単級数に変換する。

これらの応力関数による各方向の応力および変位は次式で得られる。

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{1}{\kappa} \int S_x dx + C_x \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1}{\kappa} \int S_y dy + C_y \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \\ u_x &= \frac{1}{E} \int (\sigma_x - \nu \sigma_y) dx + \delta_x \\ u_y &= \frac{1}{E} \int (\sigma_y - \nu \sigma_x) dy + \delta_y \end{aligned} \quad (14)$$

上式中、未定常数 A_m, C_m はフランジ部分との接合面($y=0$)で境界値より a_m, b_m の関数として定められる。このうち b_m はフランジ部分との接合面で x 方向変位の連続性から、また t_{y_j} は格子接合面で y 方向変位の連続性から定められる。さらに C, δ はそれぞれの境界条件が定めることができる。

(2) x 方向正対称、 y 方向正対称の解式

図-3(2)の場合についても(1)の場合と同様に取り扱って解式をうることができる。

2.2 フランジ部分の解式の誘導

フランジ部分に作用する荷重状態を図-6に示す。

外力： S_x を次の級数で表す。

$$S_x = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} b_m \sin \alpha_m x \quad (15)$$

フランジ部分について境界条件も満足する応力関数 ϕ は次式で与えられる。

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 \quad (16)$$

2.1(ii)と同様に取り扱って、 ϕ_1, ϕ_2 は次式のように導くことができる。

$$\phi_1 = \frac{-4\lambda^2 a^2}{\kappa^2 \pi^2} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{2}{1,3,5} \frac{(\nu \lambda^2 m^2 - \eta^2)}{mn(\lambda^2 m^2 + \eta^2)} b_m L_n \sin \beta_n y \cos \alpha_m x \quad (17)$$

$$\phi_2 = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \left[A_m \{ \sin \alpha_m x - \Gamma_m \cos \alpha_m y \} + C_m \{ -\Lambda_m \cos \alpha_m y + \alpha_m y (\sin \alpha_m y - \Delta_m \cos \alpha_m y) \} \right] \cos \kappa m x \quad (18)$$

$$\text{ここで } \Gamma_m = \cot \kappa \frac{\lambda m \pi}{2} \quad \Delta_m = \tan \kappa \frac{\lambda m \pi}{2} \quad \Lambda_m = \frac{\lambda m \pi}{\sin \kappa \lambda m \pi}$$

これらによる各方向の応力および変位は、2.1と同様に(14)式を適用して得られる。上式中、未定常数 A_m, C_m は境界値より b_m の関数として定められる。

2.3 ウェブ部分とフランジ部分との接合面における水平剪断力の解法

ウェブ部分とフランジ部分の解法から得られた x 方向変位： u_x がそれらの接合面($y=0$ 辺)で一致しなければならないことから不静定剪断力 S_x の係数： b_m を消去することを考える。

(1) 逆対称荷重の場合

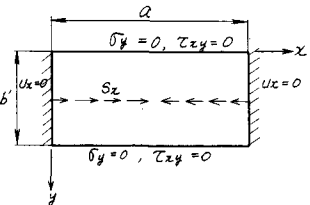
(i) 荷重(b_x)による時

$$b_m = \frac{a}{m\pi E(1+\Lambda_m)(R_m+S_m)} \left[A_m \{ -1+\nu + (1+\nu)\Lambda_m \} + 2\Gamma_m \Gamma_m \theta_0 \right] \quad (19)$$

$$\text{ただし } R_m = \frac{4a^2}{E\kappa^2\pi^2} \left[\frac{1}{m^2} (\tilde{T}_{mn}^{(1)} + \tilde{H}_{mn}^{(1)}) - \nu \lambda^2 \tilde{T}_{mn}^{(2)} - \lambda^2 m \Delta_m' (1+\Lambda_m') \left\{ 2 - (1+\nu) \frac{\lambda m \pi}{2} \sec \kappa \frac{\lambda m \pi}{2} \right\} \right]$$

$$S_m = \frac{2a\Gamma_m}{m\pi E(1+\Lambda_m)}$$

図-6



(ii) 接合面剪断力 (S_y) による時

$$\tilde{\sigma}_m = \left[\frac{a}{m\pi E(1+\lambda_m)} \left[O_m \{-1+\nu + (1+\nu)\lambda_m\} - 2\nu m T_m T_y + K_m \right] \right] / [R_m + S_m] \quad (20)$$

$$\text{ただし } K_m = \frac{-64\lambda a^2}{E\pi^2} \sum_{j=1}^K t_{yj} \left\{ \frac{1}{m^2} T_{mno}^{(1)} - \nu \lambda^2 T_{mno}^{(2)} - \nu \frac{1}{m^2} H_{no}^{(1)} \right\} L_m$$

(2) 正対称荷重の場合

(i) 荷重 (g_x) による時

$$\sigma_m = \frac{a}{m\pi E(1+\lambda_m)} \left[a_m \{-1+\nu + (1+\nu)\lambda_m\} \right] / [R_m + \tilde{S}_m] \quad (21)$$

$$\text{ただし } \tilde{S}_m = \frac{2a\tilde{F}_n}{m\pi E(1+\lambda_m)}$$

(ii) 接合面剪断力 (S_y) による時

$$\tilde{\sigma}_m = \left[\frac{a}{m\pi E(1+\lambda_m)} \left[\tilde{O}_m \{-1+\nu + (1+\nu)\lambda_m\} + \tilde{K}_m \right] \right] / [R_m + \tilde{S}_m] \quad (22)$$

$$\text{ただし } \tilde{K}_m = \frac{-64\lambda a^2}{E\pi^2} \sum_{j=1}^K t_{yj} \left\{ \frac{1}{m^2} T_{mno}^{(1)} - \nu \lambda^2 T_{mno}^{(2)} - \nu \frac{1}{m^2} H_{no}^{(1)} \right\} L_m$$

上式中 T, H で示す関数は 2 重級数の y 方向総和より定まる係数である (式は省略)。また, $[t_{yj}]$ は A, B 格子桁の接合面において図-5を参照して細分化された各ブロックの中心点で y 方向変位の連続条件から K 個の条件式が成立し、それらを連立させて解式とすることができる。

3. 計算例

図-7に示す構造体について数値計算を行い、平面保持の仮定のもとで従来の格子解と数値比較して面内変形の特性を調べることとする。外荷重 P_x は A 桁のみに載荷し、 x 方向に一様な等分布荷重であり、ウェブ上面に g_0 、ウェブ下面に g_0 なる y 方向正対称荷重とする。この荷重状態による A 桁および B 桁について、応力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 、撓み w を求めた結果から A 桁の σ_x および w の分布状態を記すと次表の通りである。

A 桁の σ_x

$y \backslash x$	0	0.15	0.30	0.40	0.50
0	0.71628	0.22383	-0.18301	-0.29780	-0.34975
0.15	1.44150	0.36094	-0.01869	-0.10315	-0.12886
(1) 0.30	1.05920	0.32605	-0.01903	0.02319	0.00704
0.40	0.56117	0.20284	0.00967	-0.01416	-0.01262
0.50	0	0	0	0	0
(2) 0	0.62620	0.11925	-0.07005	-0.28182	-0.35241

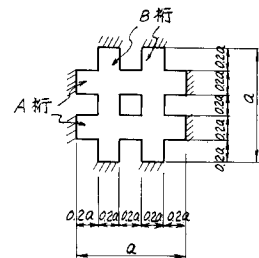
($\times g_0$)

A 桁の w

$y \backslash x$	0	0.15	0.30	0.40	0.50
(1) 0.5	0	0.18204	0.27492	0.35302	0.38080
(2) 0.5	0	0.01790	0.05188	0.06950	0.07631

($\times \frac{a}{E} g_0$)

図-7



$$\text{フランジ厚 } a' = \frac{a}{500}$$

$$\text{ウェブ厚 } a = \frac{a}{500}$$

(1) 本解法による解

(2) 平面保持による解

4. 考 審

計算結果を見ると、曲げに対して剪断の影響が著しく卓越してきて面内変形を有する深梁の力学的特性がよく表われている。

参考文献：板と Beam 系の合成構造の立体解析法ならびに板と格子桁の合成による橋梁解析への応

用 岡村宏一 43.10 年次学術講演会