

鹿島建設技術研究所 正会員 和田忠昭

〃 正会員 ○ 今井貫爾

〃 成田知明

1. はじめに

近年道路線形の複雑化に伴って橋の線形も曲線を大胆に取り入れたものになりつつある。本報文においては、同一平面上にある任意線形を有する変断面連続橋に統一的に座標を使用した解析手法を紹介する。ここでいう任意線形とは、直線・円・クロソイドを三要素とし、それらを自由に組合せ、各要素の接点における接線が一致するよう滑らかに接続される曲線橋という意味である。解析の手法としては変形法と応力法とに大別できるが、ここでは橋の各種の影響線を求めるという立場上、応力法を採用し、特にコンピューターを意識したアルゴリズムを展開する。なおこの解析にもとづいて、プログラミングされ実橋にも適用された。

2. 解析

解析対象は図1に示す任意曲線連続桁である。端子点においては振りモーメントに抵抗し、曲げモーメントに対しては free である。一方中間支点は振りモーメントに対して拘束があり、曲げモーメントは連続的である。

図-1の構造系に対して、基本系と不静定反力を図2, 3の如く取る。つまり基本系としては、中間点を取り、終点の振り拘束も取除いたものとする。不静定力は図3の様に鉛直力から振りモーメントへと一連番号をつけることにする。一般にこのような不静定力の取り方をすれば、 $(2N-1)$ 個の不静定反力を持つことになる、手計算で影響線を求めることは困難である。

さて、符号の問題であるが、鉛直力は下向きを正、振りモーメントは始点より橋軸に沿って見たときに右まわりのモーメントを正、曲げモーメントは梁の上側に圧縮を生ずるものを正、鉛直たわみは下向きを正。捩れ角は正の振りモーメントが作用したときを正と仮定する。

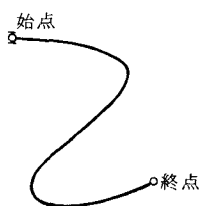


図2 基本系

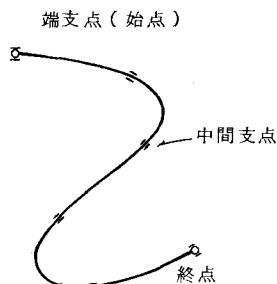


図1 任意曲線平面図

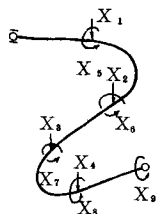


図3 不静定反力

求める影響線は単位集中荷重 $P=1$ が移動する場合、単位振りモーメント $T=1$ が移動する場合、単位曲げモーメント $M=1$ が移動する場合の三種が考えられるが、荷重を載荷することを考えた場合 $M=1$ のときは現実的でないので、前二者について弾性方程式をたてるための基本系の解析を考察する。まず $P=1$ が基本系に載荷されたときの支点反力を計算してみる(図4参照)。このとき支点反力は図に示された如く、始点に2個、終点に1個生ずる。今、支点における接線方向に x 軸、それに

垂直な y 軸をとれば、図示の如く、荷重載荷点④の座標は (x_h, y_h) 。

終点⑤の座標は (x_n, y_n) と表わされるので、鉛直方向の釣合いは

$$V_p + V_p' + 1 = 0 \quad (1)$$

また始点まわりの曲げモーメントの釣合いは

$$x_h + V_p' x_n = 0 \quad (2)$$

始点まわりの振りモーメントの釣合いは

$$T_p + y_h + V_p' y_n = 0 \quad (3)$$

であるから

$$V_p = x_h / x_n - 1 \quad (4)$$

$$V_p' = -x_h / x_n \quad (5)$$

$$T_p = x_h y_n / x_n - y_h \quad (6)$$

したがって、 $P = 1$ が荷重されているときの任意設計断面②における曲げモーメントと振りモーメントを計算できる。②点が荷重載荷点④に比べて始点側にある場合と終点側にある場合とを別けてえなければならない。一例として前者の場合の考え方を図5に示した。②点において局所座標系 x' , y' をとれば M_j, T_j, V_p, T_p は釣合うから簡単な vector 合成で

$$M_j + V_p d_{j1} - T_p \sin \tau_j = 0 \quad (7)$$

$$T_j + V_p e_{j1} + T_p \cos \tau_j = 0 \quad (8)$$

を得る。ここに d_{j1} は始点から y' 軸への距離、 e_{j1} は始点より x' 軸までの距離である。 τ_j は基準座標に対する局所座標の回転角。 $d_{j1} \cdot e_{j1}$ は符号を有している。例えば、図5のように V_p の位置が y 軸に関して M_j と

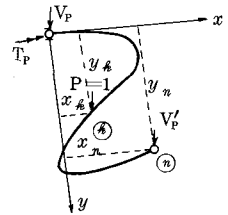


図4 基本系に $T=1$ を載荷

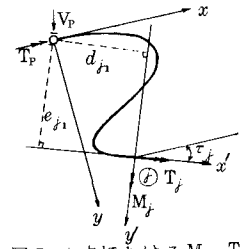


図5 j 点における M_j, T_j

同じく右まわりの曲げモーメントを生ずるときは d_{j1} は正であるが、曲線形によっては、 V_p が図示の M_j と反対回りのモーメントを与えることがある。このときは d_{j1} は負である。この判定は、局所座標系よりみて基準座標系の原点座標の正負が問題となり、その座標を (x^0, y^0) とすれば

$$x^0 < 0 \text{ のとき } d_{j1} > 0, \quad x^0 > 0 \text{ のとき } d_{j1} < 0$$

$$\text{同様に, } y^0 < 0 \text{ のとき } e_{j1} > 0, \quad y^0 > 0 \text{ のとき } e_{j1} < 0$$

ここに (x^0, y^0) は簡単な二次元の座標変換より

$$x^0 = -x_j \cos \tau_j - y_j \sin \tau_j \quad (9)$$

$$y^0 = -y_j \cos \tau_j + x_j \sin \tau_j$$

と与えられる。

次に $h \leq j \leq n$ のときは、中間に $P = 1$ が荷重されているのに注意して

$$M_j + V_p d_{j1} + d_{jh} - T_p \sin \tau_j = 0 \quad (10)$$

$$T_j + V_p e_{j1} + e_{jh} + T_p \cos \tau_j = 0 \quad (11)$$

なる関係を得る。ここに d_{jh}, e_{jh} は④点から y' 軸、 x' 軸への距離である。

$$\begin{aligned} x_h &= (x_h - x_j) \cos \tau_j + (y_h - y_j) \sin \tau_j \\ y_h &= (y_h - y_j) \cos \tau_j + (x_h - x_j) \sin \tau_j \end{aligned} \quad (12)$$

なる Parameter x^k, y^k を導入したとき d_{jk}, e_{jk} の符号が決定されて

$$\begin{aligned} x^k < 0 \text{ のとき} \quad d_{jk} > 0, \quad x^k > 0 \text{ のとき} \quad d_{jk} < 0 \\ y^k > 0 \text{ のとき} \quad e_{jk} > 0, \quad y^k < 0 \text{ のとき} \quad e_{jk} < 0 \end{aligned}$$

である。

次に単位振りモーメント $T = 1$ が載荷された時の基本系の任意設計断面④の内力を計算する。 $P = 1$ の場合と全く同じ議論で求まる (図 6 参照)。このときの支点反力は

$$V_T = -\sin \tau_k / x_n \tag{13}$$

$$V'_T = \sin \tau_k / x_n \tag{14}$$

$$T_T = -V'_T y_n - \cos \tau_k \tag{15}$$

であるから、任意設計断面④点における曲げモーメント M_j , 振りモーメント T_j は、やはり 2 種に分類して求まる。まず $1 \leq j \leq k$ のときは

$$M_j + V_T d_{j1} - T_T \sin \tau_j = 0 \tag{16}$$

$$T_j + V_T e_{j1} + T_T \cos \tau_j = 0 \tag{17}$$

ここに d_{j1}, e_{j1} は前述のもので符号も前の通りである。 $k \leq j \leq n$ のときは

$$M_j + V_T d_{j1} - T_T \sin \tau_j - \sin(\tau_j - \tau_k) = 0 \tag{18}$$

$$T_j + V_T e_{j1} + T_T \cos \tau_j + \cos(\tau_j - \tau_k) = 0 \tag{19}$$

である。

さて図 3 に示した構造系の弾性方程式は、周知の如く

$$\sum_{j=1}^{2N-1} \delta_{ij} X_j = -(Pf_{i0} + T\theta_{i0}) \tag{20}$$

と表わされる。ここに N は span 数, X_j は不静定反力, δ_{ij} は X_j が基本系の j 点に作用したときの i 点の変位。 P, T はそれぞれ集中荷重, 振りモーメントである。 f_{i0} は不静定力 X_i による各点の鉛直撓みを成分とする vector であり, θ_{i0} は不静定力 X_i による各設計断面の振れ角を成分とする vector である。(21) 式を不静定反力の影響線を求めやすい様に matrix 表示すれば

$$[\delta][X] = -P[F] - T[\theta] \tag{21}$$

である。ここに $[\delta]$ は要素 δ_{ij} より成る flexibility matrix で $[F], [\theta]$ はその第 i 行目がそれぞれ f_{i0}, θ_{i0} よりなる matrix である。

(21) 式において、まず $P = 1, T = 0$ としてみれば $P = 1$ が移動するときの不静定反力の影響線が

$$[X] = -[\delta]^{-1}[F] \tag{22}$$

で求まる。ついで $P = 0, T = 1$ において $T = 1$ が移動するときの不静定反力も

$$[X] = -[\delta]^{-1}[\theta] \tag{23}$$

で計算される。

さて残る問題は (22), (23) 式を計算するために f_{i0}, θ_{i0} を計算することである。例えば $P = 1$ が④点に作用したときの④点の鉛直たわみを求めることを考えてみよう。仮想仕事の原理によれば、④点にも $P = 1$ をかけて、その両者のなす仕事を求めれば良いから、そのたわみを $f_{i0,k}$ とかいて

$$f_{i0,k} = \int (M_i M_k / EI) ds + \int (T_i T_k / GI_T) ds \tag{24}$$

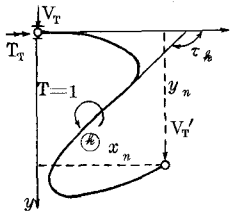


図 6 基本系に $T=1$ が載荷

で計算できる。 $E I$ は曲げ剛性、 $G I_T$ は捩り剛性。 M_1, M_2 はそれぞれ①点、②点に $P = 1$ を載荷したときの曲げモーメント曲線、 T_1, T_2 は同様に捩りモーメント曲線である。これらは(7)、(8)、(10)、

(11)、(16)、(17)、(18)、(19)式より計算される。 $P = 1$ が載荷されたときの捩れ角や $T = 1$ が載荷された時の鉛直撓みや捩れ角の計算も同様である。なお(24)は曲線に沿った積分である。

このように、(22)、(23)式でそれぞれ $P = 1$ 、 $T = 1$ が移動する時の不静定反力の影響線が求まったら、各設計断面における

(i) $P = 1$ が移動するときの曲げモーメントの影響線

(ii) " 捩りモーメント "

(iii) " 剪断力 "

(iv) $T = 1$ が移動するときの曲げモーメントの影響線

(v) " 捩りモーメント "

(vi) " 剪断力 "

の6種の断面力の影響線は、基本系の断面力の影響線と不静定反力の影響線とを適当に重ね合わせることによって得られる。

なおこのような各種の影響線にどのように荷重載荷するのが合理的であるか道路橋に関して種々検討したが、ここでは省略する。

3. 結論

従来の曲線橋の解析は、単一曲線に関しては詳細に行なわれているが、数種の曲線を組合せた場合についての例は余り見られない。本報告で、直線、円、クロソイドを三要素とする任意形曲線についての影響線を求める手法を応力法によって展開した。本解析による曲率と応力の関係、曲線の種類による応力の問題、曲線の組合せによる応力の分布等の検討例については、都合で次の機会にゆずりたいと考えている。

(参考文献)

1. 渡辺昇：曲線桁の理論と計算，技報堂
2. Muppidi N. Reddy, Jan J. Tuma, Analysis of Laterally Loaded Continuous Curved Beams, Jour. of Struc. Div., ASCE, Feb., 1967