I-183 吊材の伸びを考慮した吊橋解析について

(株)長大橋設計センター 正○大月 哲
同 正 青柳史郎

§1 まえがき

吊橋の応力解析は，半世紀以上にわたっていわゆる撓度理論によってきた。撓度理論では吊材を伸びないとし，しかも連続的に配された一種の剛膜のように扱っている。このことは微分方程式を一元化し，解析を比較的容易にしているが，吊材がdiscreteな部材であること，また比較的ヤング率の小さなロープ材が用いられていることからみて非現実的な仮定であるといえよう。

一方，近年の高速電子計算機の発達にともない，H.Esslinger等によって電子計算機向きの撓度理論の改編が行われ，D.Brotton，G. Arnord，倉西，福田等によって微分方程式を捨てた行列論による吊橋の解法が登場した。また吊橋の構造特性にも依存しない大変形理論による解法も多方面で実施されつつある。これらの解法には吊材の伸びだけでなく，ケーブルと補剛げたの橋軸方向相対変位などの影響も考慮した厳密な解析を目的としたものもあるが，吊橋の非線形性と超高次の不静定構造物であることから，厳密な解を得るためにはかなりの費用を要するのが現状のようである。経済的に解析するためには構造を簡略化するか，力学的近似を行うかが必要であろう。

ここで構造の簡略化と力学的近似とを最低限におさえ，しかも経済的に解析する方法について筆者らの考えを報告する。

すなわち，吊橋に弾性支承上の連続梁における5連モーメント定理を用いて，撓度理論の代数的表現を導びき，またその求積にはEscalation法を用いることによって比較的迅速に解を得る手法を考案した。この方法では吊材の間隔が各径間で一定であること，また相隣る吊材間で補剛げたが等断面であるという構造上の制約をおいているが，これは通常の吊橋では満たされているとしてよい。またこの方法は2ヒンジ補剛げた形式，連続補剛げた形式を問わずほゞ同一の流れで解を得る方法である。力学的仮定には次のようなものをおいた。

(1) 相隣る吊材間ではケーブルは直線を保つ。
(2) ケーブルと補剛げたとの橋軸方向相対変位は小さく，吊材張力は変形後も鉛直方向を向く。
(3) 相隣る吊材間で補剛げたの相対変位は小さく，この間では変形後も力の作用方向は不変である。
(4) ケーブルの橋軸方向移動量の計算において変形によるケーブル傾斜角の変化は無視できる。
(5) ケーブルに与える塔のバネ効果は無視できる。

なお(4)，(5)については，これを仮定しなくても解法はさして困難を来たさない。ただ(4)を仮定しても通常の長大吊橋の諸元のもとではケーブルの移動量に0.1%程度の誤差しかまぜず，また(5)については吊橋の主塔は本来ケーブルにバネ効果を与えないように設計すべきものであり，設計上十分にこの条件は満たし得るのでこれらを仮定したものである。

§2 吊橋における5連モーメント式

i番目の吊材の位置で示される格点iでは，曲げモーメントM_i，活荷重による吊材張力S_i，ケーブルのたわみv_i，けたのたわみη_iの間に次の関係式がなりたつ。

(1) けたの釣合； $\dfrac{M_{i-1}}{J_{i-1}} + 2\left(\dfrac{1}{J_{i-1}} + \dfrac{1}{J_i}\right)M_i + \dfrac{M_{i+1}}{J_i} = -\dfrac{6E}{\lambda^2}(\eta_{i-1} - 2\eta_i + \eta_{i+1}) + \tau_i$ ①

(2) 格点の釣合； $S_i = \dfrac{1}{\lambda}(M_{i-1} - 2M_i + M_{i+1}) + R_i$ ②

(3) ケーブルの釣合； $v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1} = -\dfrac{\lambda}{H_t}S_i - \dfrac{H}{H_t}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1})$ ③

(4) 吊材の釣合； $\eta_i - v_i = \dfrac{h_i}{E_h A_h}S_i + \Delta t\,\omega_h \cdot h_i$ ④

ただし， EJ_i：けたの曲げ剛性， λ：格点間距離（吊材間隔），h_i：吊材の初期長さ
τ_i：3連モーメント式の荷重項， R_i：格点荷重による単純反力，
y_i：ケーブルの初期縦距，H_t：全ケーブル水平張力，H：ケーブル水平張力増分
Δt：温度変化量， ω_h：吊材の膨張係数， $E_h A_h$：吊材の伸び剛性

ここで $H_t = H_w + H$ （H_w：死荷重時ケーブル水平張力）を仮りに既知量として，①～④式からη_i，v_i，S_iを消去し，次式を得る。

$$\left\{\frac{1}{\lambda}\mathbb{K}^T\mathbb{Y}^*\mathbb{K} + \frac{\lambda^2}{6EI}\mathbb{K}^* - \frac{\mathbb{K}}{H_t}\right\}\mathbb{m} = \left\{\frac{\lambda}{H_t} - \mathbb{K}\mathbb{Y}^*\right\}\mathbb{r} + \frac{\lambda^2}{6E}\mathbb{t} + \frac{\mathbb{K}\mathbb{y}}{H_t}H - \Delta t\,\omega_h\mathbb{K}\mathbb{d} + \mathbb{v}_0 - \frac{\mathbb{K}\mathbb{Y}^*}{\lambda}\mathbb{m}_0 + \mathbb{m}_1 \quad ⑤$$

$$\mathbb{m} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_n \end{Bmatrix},\quad \mathbb{r} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{Bmatrix},\quad \mathbb{t} = \begin{Bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_n \end{Bmatrix},\quad \mathbb{y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix},\quad \mathbb{d} = \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{Bmatrix}$$

$$\mathbb{m}_0 = \begin{Bmatrix} M_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ M_{n+1} \end{Bmatrix},\quad \mathbb{m}_1 = \begin{Bmatrix} \left(\frac{1}{H_t} - \frac{1}{6EJ_1}\right)M_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \left(\frac{1}{H_t} - \frac{1}{6EJ_n}\right)M_{n+1} \end{Bmatrix},\quad \mathbb{v}_0 = \begin{Bmatrix} v_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v_{n+1} \end{Bmatrix} \quad ⑥$$

⑤式は各径間でそれぞれ作られる。$\mathbb{m}_0$，$\mathbb{m}_1$，$\mathbb{v}_0$ はやはりn元のベクトルであり，境界条件を構成する。すなわちM_0，M_{n+1}，v_0，v_{n+1}は各支点モーメントおよび同上のケーブルたわみであるが，いまこれらを未知量としておく。差分マトリックス$\mathbb{K}$，3連マトリックス$\mathbb{K}^*$，吊材マトリックス$\mathbb{Y}^*$は次式で定義される。

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ 0 & & & 1 & -2 \end{bmatrix},\quad \mathbb{K}^* = \begin{bmatrix} \mu_1 & \rho_1 & & & 0 \\ \rho_1 & \mu_2 & \rho_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \rho_{n-2} & \mu_{n-1} & \rho_{n-1} \\ 0 & & & \rho_{n-1} & \mu_n \end{bmatrix},\quad \mathbb{Y}^* = \frac{1}{E_h A_h}\begin{bmatrix} h_1 & & & & 0 \\ & h_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & h_{n-1} & \\ 0 & & & & h_n \end{bmatrix} \quad ⑦$$

$$\rho_i = \frac{1}{J_i},\quad \mu_i = 2\left(\frac{1}{J_{i-1}} + \frac{1}{J_i}\right)$$

⑤式の $\mathbb{M}$ の係数行列を $\mathbb{F}$ とおくと、これは次のように表わせる。

$$\mathbb{F} = \begin{bmatrix} c_1 & b_1 & a_2 & & & & \\ b_1 & c_2 & b_2 & a_3 & & \text{O} & \\ a_2 & b_2 & c_3 & b_3 & a_4 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-3} & b_{n-3} & c_{n-2} & b_{n-2} & a_{n-1} \\ & \text{O} & & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_n \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} c_1 &= \frac{4h_1+h_2}{\lambda E_h A_h} + \frac{\lambda^2}{6E}\mu_1 + \frac{2}{H_t} \\ c_n &= \frac{h_{n-1}+4h_n}{\lambda E_h A_h} + \frac{\lambda^2}{6E}\mu_n + \frac{2}{H_t} \\ c_i &= \frac{h_{i-1}+4h_i+h_{i+1}}{\lambda E_h A_h} + \frac{\lambda^2}{6E}\mu_i + \frac{2}{H_t} \\ b_i &= \frac{-2(h_i+h_{i+1})}{\lambda E_h A_h} + \frac{\lambda^2}{6E}\rho_i - \frac{1}{H_t}, \quad a_i = \frac{h_i}{\lambda E_h A_h} \end{aligned} \qquad ⑧$$

$\mathbb{F}$ は5連バンドマトリックスであって、この表現は弾性支承上の連続ばりにおける5連モーメント式と酷似している。なお、吊材の伸びを無視すれば $a_i \equiv 0$ となり、$\mathbb{F}$ は3連になおる。これは倉西の行列解法の式に一致する。

§3 Escalation 法

解は⑤式を解いて得られるが、そのためには⑧式の $\mathbb{F}$ と⑦式の $\mathbb{K}$ の逆行列を求める必要がある。$\mathbb{K}$ の逆行列は比較的容易に書表わせて次式となる。

$$\mathbb{K}^{-1} = \left[k_{ij} \right] \qquad \begin{aligned} k_{ij} &= -\frac{i(n+1-j)}{n+1}, \quad i \le j \\ &= -\frac{j(n+1-i)}{n+1}, \quad i \ge j \end{aligned} \qquad ⑨$$

$\mathbb{F}$ は長大吊橋では100元を越え、逆行列を求める方法が重要な問題となるが、ここでは $\mathbb{F}$ が対称でしかもバンドマトリックスであることを利用して次の Escalation 法によった。すなわち $\mathbb{F}$ の左上 m 元行列を $\mathbb{F}_m$ とし、$\mathbb{F}_m^{-1}$ が既知であるとして、$\mathbb{F}_{m+1}^{-1}$ は次式で得られる。

$$\mathbb{F}_{m+1}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbb{P} & \mathbb{Q} \\ \mathbb{Q}^T & S \end{bmatrix} \qquad \mathbb{P}:(m \times m), \quad \mathbb{Q}:(m \times 1), \quad S:(1 \times 1)\ (\text{スカラー量}) \qquad ⑩$$

$$S = \frac{1}{c_{m+1} - \mathbb{b}^T \mathbb{F}_m^{-1} \mathbb{b}}, \quad \mathbb{Q} = -\mathbb{F}_m^{-1} \mathbb{b} \cdot S, \quad \mathbb{P} = \mathbb{F}_m^{-1} - \frac{\mathbb{Q}\mathbb{Q}^T}{S}$$

ただし

$$\mathbb{b}^T = (0, 0, \cdots 0, a_m, b_m) \quad ;(1 \times m) \quad 2\text{要素のみ non-zero}$$

$\mathbb{b}^T$ の形から⑩式の演算は迅速である。したがって $m = 2$ から容易に n まで元数をあげ得る。また、主径間では構造系も左右対称の場合が多いが、そのとき $\mathbb{F}$ は他の1ケの対角要素に関しても対称となる。この性質を用いると $\mathbb{F}^{-1}$ はさらに容易に求まる。$M = \frac{1}{2}(n+1)$ とし、$\mathbb{F}_{M-1}^{-1}$ まで得られているとする。そのとき、

$$\mathbb{F}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbb{P}_M & \mathbb{Q}_M \\ \mathbb{Q}_M^T & \mathbb{S} \end{bmatrix} \qquad \mathbb{P}_M:(M \times M), \quad \mathbb{Q}_M:(M \times (M-1)), \quad \mathbb{S}:((M-1) \times (M-1)) \qquad ⑪$$

$$\mathbb{P}_M = \left[\mathbb{F}_M - \mathbb{B}(\mathbb{F}_{M-1}^{-1})^V \mathbb{B}^T \right]^{-1} \qquad \mathbb{B} = \begin{bmatrix} & & \text{O} \\ a_M & & \\ b_M & a_{M+1} & \end{bmatrix}$$

$\mathbb{A}^V$: $\mathbb{A}$ の第2対角要素に関する転置行列

$\mathbb{B}$の形からわかるように $\mathbb{B}(\mathbb{F}_{M-1}^{-1})^{V}\mathbb{B}^{T}$ は右下4要素だけが0でないマトリックスである。したがって $\mathbb{P}_M$ は $\mathbb{F}_{M-2}^{-1}$ から2回のEscalation操作で求まる。$\mathbb{P}_M$が求まれば $\mathbb{F}^{-1}$ が2ケの対角要素に関して対称であることから $\mathbb{Q}_M$,$\mathbb{S}$ も容易に得られ $\mathbb{F}^{-1}$ の求積が完結する。

§4 解の決定

$\mathbb{F}^{-1}$, $\mathbb{K}^{-1}$ が得られれば曲げモーメント $\mathbb{M}$ は ⑤ 式から次式で表わせる。

$$\mathbb{M}=\mathbb{F}^{-1}\left[\left\{\frac{\lambda}{H_t}-\mathbb{K}\mathbb{Y}^{*}\right\}\mathbb{r}+\frac{\lambda^2}{6E}\mathbb{t}+\frac{\mathbb{K}\mathbb{y}}{H_t}H-\Delta t\,\omega_h\mathbb{K}\mathbb{d}+\mathbb{V}_0-\frac{\mathbb{K}\mathbb{Y}^{*}}{\lambda}\mathbb{m}_0+\mathbb{m}_1\right] \quad ⑫$$

他の解も ①〜④ から求まる。すなわちすべての解は H, M_0, M_{n+1}, v_0, v_{n+1} の関数として求まった。M_0, M_{n+1} は2ヒンジ吊橋では0,連続吊橋ではたわみ角の連続条件からきまる。また v_0, v_{n+1} は v_1, v_n と定着点との関係から直線内挿法で定まる。かくてすべての力学量は H の一次関数となった。

ケーブル水平張力増分 H はいわゆるケーブル方程式からきまる。すなわちケーブルのたわみ v_i が $v_i = v_{Hi}H + v_{Yi}$ と表わされることから,ケーブルの橋軸方向移動量 δ_i が次式を満足する。

$$\delta_{i+1}-\delta_i=\left[\frac{\lambda}{E_cA_c}\sec^3\phi_i-\frac{y_{i+1}-y_i}{\lambda}(v_{Hi+1}-v_i)\right]H+\Delta t\,\omega_c\lambda\sec^2\phi_i-\frac{y_{i+1}-y_i}{\lambda}(v_{Yi+1}-v_{Yi}) \quad ⑬$$

ケーブル定着点で $\delta=0$ であることを利用してHが決定される。ϕ_i: 死荷重時ケーブル傾斜角。

ケーブル水平張力の仮定値 H_t とここに得られた H_w+H の間に無視できない差があるときPerryの方法その他で収束計算を行えば解は急速に収束する。

§5 数値解析例

吊材の伸びを無視した場合と考慮した場合とについて数値計算を行ってみたが,伸びを無視した場合の解は撓度理論の解によく一致している。吊材の伸びを考慮しても解にはほとんどその効果は現われないが,連続補剛げた吊橋において若干の影響がみられる。下図に径間長 300+860+300 の連続吊橋の主塔部支点反力の影響線を比較した。影響線は線形化撓度理論の考え方に従って求めたものでケーブル水平張力増分Hの収束計算は行っていない。図のように中間支点反力は吊材の伸びを考慮することによって減少する。連続吊橋ではその他の解に対してもある程度の影響が現われるが,設計上問題とするほどの差ではない。傾向的には,吊材の伸びによって吊材への荷重分配はよくなる。またけたの応力とたわみは支点付近で大きくなり,中間付近では逆に小さくなる。

数値計算例から,通常の設計計算には撓度理論による微分方程式解でも十分であろうということがわかった。