

I-181 エネルギー法によるケーブル構造の解析 (第1報)

(株)神戸製鋼所 正員 波田 凱夫
 " " 新家 徹
 " " O 広中 邦汎

1. まえがき

吊橋のキャットウォーク、吊屋根などに代表されるケーブル構造は載荷時の変形が大きいため、有限変位も考慮した非線形解析を必要とする。従来この種の計算には膜理論や漸増荷重による変形法等が多く用いられたが、計算上種々の問題をほらんでいるようである。Buchholdtはポテンシャルエネルギー最小の原理も直接利用して、非線形ケーブル構造を解析する方法を示している。(文献1)

本報告はこのようなエネルギー法にもとづき、さらに非線形計画法の手法を応用して解析法を発展させた一方法を示したものである。

2. 解析の概要

構造が外力をうけたとき構造のもつ全ひずみエネルギーを U 、外力によるポテンシャルエネルギーを V とすると、全ポテンシャルエネルギーは $W = U + V$ となる。ケーブル構造では部材力として張力のみが作用するから、ひずみエネルギーは張力と軸方向の伸びだけで表わされる。いま P_0 を構造の全部材の初期張力、 e を伸びとすると、伸び後の張力は

$$P = P_0 + K e \quad (1)$$

となる。ここに K は剛性マトリックスとその対角要素は EA/L である。ただし E : ヤング率、 A : 断面積、 L : 部材の長さ。式(1)より部材のひずみエネルギーは次式のようになる。

$$U = P^T e = P_0^T e + \frac{1}{2} e^T K e \quad (2)$$

一方、外力によるポテンシャルエネルギーは

$$V = -F^T X \quad (3)$$

となる。ここに F は全格点の外力、 X は変位を表わす。

伸び e と変位 X の関係は、Fig-1 に示すように変形前後の幾何学的関係より、

$$e = \frac{1}{L} \left\{ (X_k - X_j) + \frac{1}{2} (X_k - X_j) \right\} (X_k - X_j) \quad (4)$$

となる。 X は変形前の格点の座標である。上式の第2項は非線形を表わす。

式(4)を式(2)へ代入し、式(3)も加えると全ポテンシャルエネルギー W が変位 X について、変数 n の4次式として表わされる。 n は構造全体の自由度数である。

ポテンシャルエネルギー最小の原理より W が最小のときに構造のつり合い条件が満足されるが、 W が X の凸関数であるなら次の停留条件式は最小点のみ満足される。

$$\nabla W = 0 \quad (5)$$

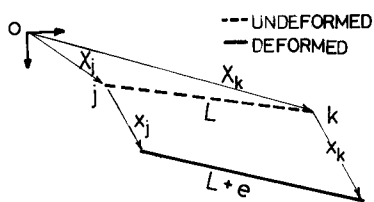


Fig-1

すなわち式(5)は格点ごとのつり合い条件を示し、これが唯一であることを示す。そこで、 W の凸性および非線形最小値問題の概略について述べる。 V は x の1次関数であるので、 U のみが x の凸関数であることを示せばよい。関数 $f(x)$ が凸関数であるための必要十分条件は、

$$f(x) - f(x^*) > \frac{\partial f(x^*)}{\partial x^*} \cdot (x - x^*) \quad (6)$$

がすべての変数 x , x^* について成り立つことである。式(2)で U は e の正值2次形式であるから、

$$U - U^* > dU/de \cdot (e - e^*) \quad (7)$$

が成り立つ。式(4)において $\partial e/\partial x_k = -\partial e/\partial x_j$ であるから、

$$e - e^* > \frac{\partial e}{\partial x_k} \left\{ (x_k - x_j^*) - (x_k - x_j^*) \right\} \quad (8)$$

が成り立つ。部材 k として張力だけが作用するため、 $\partial U/\partial e = P > 0$ も上式の両辺にかけ、これを全部材について成り立たせれば、不等式(7)も考慮して

$$U - U^* > \frac{\partial U}{\partial x_k^*} \left\{ (x_k - x_j) - (x_k - x_j^*) \right\} \quad (9)$$

が成り立つことが証明される。 $(^*$ はベクトル空間の任意の位置を示す。)ゆえに、ひずみエネルギー U は変位 x について凸関数となる。計算上部材に圧縮力が生ずる場合には不等式(9)は成立しなくなるが、ケーブル構造では部材に圧縮力の作用するつり合いは成り立たなくなるので、計算の過程で圧縮力が生じた場合その部材の軸力を0とおくことにより解決できる。(この場合にも U は x の凸関数であることが証明されるが、略す。)

さて、非線形最小値問題は数値統計学の方面で多く研究されているが(文献2),上記のような制約条件のない凸関数の最小値問題は有限の繰返し回数で収束することや証明されている。最小値問題における有効な方法として最大傾斜法、共役勾配法があるが、最大傾斜法は比較的簡単なアルゴリズムで計算されるにもかかわらず、最大傾斜の方向が初期値によって制約され、関数によっては非常に収束が悪くなるという欠点がある。共役勾配法は正值2次形式の関数では変数 n の繰返しで収束することが証明されている。また凸関数は最小値の近傍で正值2次形式で近似できることから、これによればかなり早く収束する。収束の判定は次のユークリッドノルムを用いて行なわれる。

$$R = \left\| (\nabla^T W \cdot \nabla W)^{1/2} \right\| \quad (10)$$

これは力学的には全格点のつり合い力の大きさを表わすが、 $R=0$ となった場合式(5)が成立し、構造がつり合うことになる。

3. 数値計算上の問題点

ケーブル構造の設計の上で大きな問題となる点は、載荷後の形状をあらかじめ設定された形状にするための部材の無応力長を決定することにある。しかし第2章で述べたように、変位による非線形を無視することができないため、構造を最終的なつり合い状態にある形状にすること自体容易でなく、快く、無応力長を決定することはかなり困難な問題である。本論文では計算上のテクニックとして、各部材にあらかじめ与えられた初期張力 P_0 を変化させて所定の形状を導く方法をとる。すなわち、設計で所望する形状における部材の張力を予測し、その張力を初期張力として第2章で述べた非線形計算を行ない、その結果と設計形状とがある誤差以内で一致するまで計算を繰返す。

この最初の初期張力を予測する方法として、最小二乗法を利用した。Fig-2のような接点jで部材の張力と外力Fjが釣り合っているとするば、

$$\sum_{s=1}^S \frac{P}{L} (x_j - x_s) - F_j = 0 \quad (11)$$

が成り立つ。上式が全自由度数mについて成立するから、

$$E P = F \quad (12)$$

となる。ただし、mを全部材数とすれば、E: (n × m) 行列、P: m列ベクトル、F: n列ベクトルである。式(12)はPを未知数とする連立一次方程式であるが、これが解を持つための必要十分条件は、Eの階数と、Eのm+1列にFを加えた行列[E|F]の階数が一致することである。さて、Fig-4のケーブル・トラスのように一般のケーブル構造では、自由度数の方が部材の数より多い場合が多いが、このような構造では特別の場合を除いてEの階数と[E|F]の階数とは一致しない。そこで式(12)を次式のように変形し、

$$E P = F + R \quad (13)$$

Rのユークリッドノルム||R||を最小にするようなPを求める。すなわち、

$$\|R\|^2 = (E P - F)^T (E P - F) \rightarrow \min \quad (14)$$

この計算はたかだかm回の繰返しで行なえるが、解析の詳細については紙面の都合上省略する。

4. 計算プログラムおよび計算例

Fig-3は以上の理論に従った、計算のフローチャートを示したものである。またFig-4のようなケーブルトラスのモデルを設定した計算結果をFig-5, Table-1, 2に示す。なおFig-3で②の最小二乗法はIBM社のSSP (Scientific Subroutine Package) も使用した。⑤の共役勾配の方向はFletcher-Reevesの理論に従って求めた。

Fig-5はFig-4の計算例でのRの収束状態およびポテンシャルエネルギーWの最小化の状態を示すものである。収束判定の1%とした場合176(自由度数40)で収束した。またWは繰返し数130までは急激に減少するが、それ以後は鈍くなる。RとWの間には相関的な関係があるものと思われる。Table-1, 2はFig-3の③~⑧を繰返したもので、⑦の許容誤差を±5mmとしたものである。Table-1は収束判定に達するまで初期張力を変化させたもので、この初期張力の変化は無応力長の変化と同等である。Table-2は変位を表わすとともに、設計形状との座標のずれを表わす

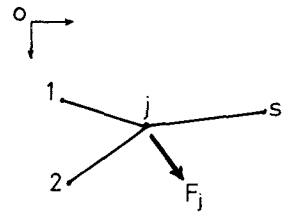


Fig-2

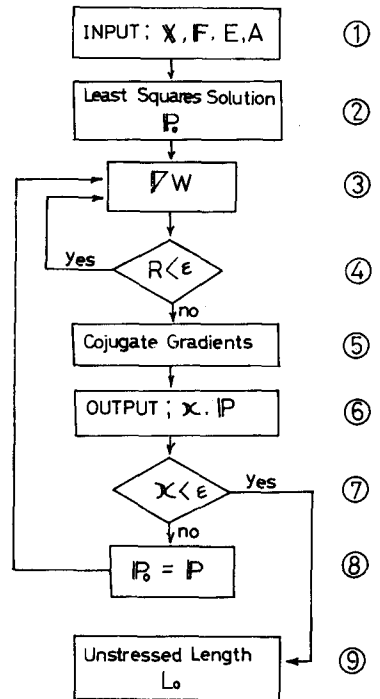


Fig-3 FLOW CHART

ものである。この計算例では5回の繰返して収束したが、計算時間はIBMシステム360-65のCPU占有時間約3分間である。

5. あとがき

著者らはこの結果を検証するために実験を行なったが、計算値と実験値は極めて良好な一致を示した。(文献3)) また、この方法によれば

計算時間、計算機の容量ともに極めて少なく済み、この種の計算には有力な方法であることを確信した。なお、この理論をもとにして三次元ケーブル構造、大スパン立体トラス等の解析にまで発展させている。またこの方法にもとずいた固有振動解析も行なっているのび機会をあらためて、報告したい。

(参考文献)

- 1) Buchholdt "A non-linear deformation theory applied to two dimensions pretensioned cable assemblies." Inst. civ. Engrs. '69
- 2) コワリツフ, オズボーン (山本, 小山訳) 「非線形最適化問題」 培風館
- 3) 波田, 新家, 広中 「ケーブルトラスの模型実験」 土木学会全国大会 昭46年

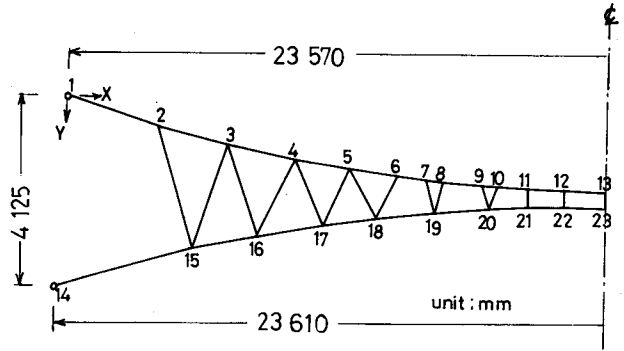


Fig-4 CABLE TRUSS MODEL

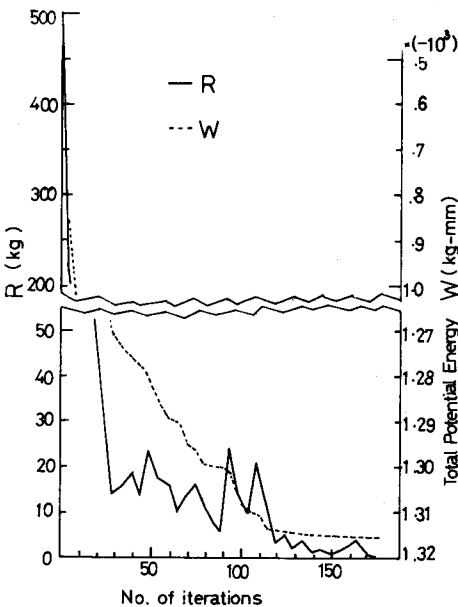


Fig - 5

ITERATION ② - ⑥ (Fig-3)

Table-1 PRETENSION P₀

member	1	2	3	4	5
1-2	761	794	799	799	800
4-5	737	758	767	769	771
7-8	730	749	758	761	763
12-13	726	744	753	756	758
14-15	200	194	196	196	196
17-18	195	199	196	195	195
22-23	196	195	194	196	194
2-15	100	18	12	12	11
15-3	50	1	4	4	4
13-23	10	3	3	3	3

unit; kg

Table - 2 DEFLECTIONS X

joint	1		2		3		4		5	
	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
2	0	2	1	-2	1	-3	1	-4	1	-4
4	1	-3	1	-2	1	-2	1	-2	1	-2
6	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	9	0	5	0	3	0	3	0	3
10	0	9	0	5	0	5	0	3	0	3
13	0	13	0	7	0	6	0	5	0	5
15	-5	-16	-1	-3	-1	-3	-1	-3	-1	-3
18	-2	-1	0	0	0	-1	0	0	0	0
20	-1	9	0	5	0	3	0	3	0	3
23	0	13	0	7	0	6	0	5	0	5

unit; mm