

大阪市立大学 工学部 正員 倉田宗章
 大阪市立大学 工学部 正員 園田恵一郎
 大阪市下水道局 正員 堀田清美

1. まえがき

鉄筋コンクリート床板のたわみ解析に関しては古くから純弾性板として取り扱った多くの研究があり、また剛塑性板としての近似解析法の研究もいくつかあるが、コンクリートや鉄筋の非弾性的な性質を忠実にとり入れた解析法の研究は極めて少ないようである。一昨年、筑田大学の色部氏は鉄筋コンクリート床板を直交異方性板とみなし、断面力に関するミーゼス型の降伏条件式を使用した解析法を提案された。この解析法においては、床板のたわみ性状は主として鉄筋の性質に支配されるものと仮定されている。しかしながら、鉄筋コンクリート床板のたわみ性状はコンクリートの性質、特に引張強度と圧縮強度の相異による影響が大きいことは明白であり、この点が解析上の未解決の問題として残っている。本研究はコンクリートを圧縮と引張り強度の異なる弾塑性体と仮定し、降伏条件式は二軸圧縮実験より得られた破壊曲線から類推し、分布荷重を受ける矩型床板のたわみ増分にに関する基礎方程式を誘導したものである。

2. コンクリートおよび鉄筋の応力増分-歪増分関係

一軸圧縮・引張状態での応力-歪曲線を図-1のように仮定する。降伏条件式は H. Weigler, G. Becker 氏の二軸圧縮破壊実験結果(図-2)より決定する。この破壊曲線は圧縮強度の大小によって若干異なるが、これらを平均化し、一軸引張強度は圧縮強度 σ_{28} の $1/10$ と仮定してこので用いる破壊曲線を決定する。つぎにこの曲線を図-1の応力-歪曲線に対応させることにより、平面応力状態でのコンクリートの Yield function (loading function) F_c をつぎのように表わすことができる。

$$F_c = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 0.5562 \sigma_x \sigma_y + 0.9 \sigma_e (\sigma_x + \sigma_y) + 2.5562 \tau_{xy}^2 - 0.1 \sigma_e^2 \quad (1)$$

こゝに $\sigma_e = \sigma_0 \{1 - (\epsilon_{eq} - \sigma_0 / E_c) F_c'\} \geq 0$, ϵ_{eq} は一軸換算歪を意味し、

$$\epsilon_{eq} = 4.5 (\epsilon_x + \epsilon_y) + 5.0 \sqrt{1.21 (\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2) + 1.39752 \epsilon_x \epsilon_y + 1.02248 \gamma^2}.$$

つぎに、Prager, Hodge, Drucker の flow theory of Plasticity に従えば

$$\dot{\epsilon}_x = \frac{\dot{\sigma}_x}{E_c} + \lambda \frac{\partial F_c}{\partial \sigma_x}, \quad \dot{\epsilon}_y = \frac{\dot{\sigma}_y}{E_c} + \lambda \frac{\partial F_c}{\partial \sigma_y}, \quad \dot{\gamma} = \frac{\dot{\tau}_{xy}}{G_c} + \lambda \frac{\partial F_c}{\partial \tau_{xy}}. \quad (2)$$

$$\frac{\partial F_c}{\partial \sigma_x} = 2\sigma_x - 0.5562 \sigma_y + 0.9 \sigma_e = a, \quad \frac{\partial F_c}{\partial \sigma_y} = 2\sigma_y - 0.5562 \sigma_x + 0.9 \sigma_e = b,$$

$$\frac{\partial F_c}{\partial \tau_{xy}} = 5.1124 \tau_{xy} = c, \quad \frac{\partial F_c}{\partial \epsilon_{eq}} = \frac{\partial F_c}{\partial \sigma_e} \frac{d\sigma_e}{d\epsilon_{eq}} = -0.9 (\sigma_x + \sigma_y) E_c' + 0.2 \sigma_e E_c' = d E_c' \text{ なる記号を用いる}$$

。塑性状態では降伏条件式 $F_c = 0$ を破ることができないことより、

$$dF_c = \frac{\partial F_c}{\partial \sigma_x} \dot{\sigma}_x + \frac{\partial F_c}{\partial \sigma_y} \dot{\sigma}_y + \frac{\partial F_c}{\partial \tau_{xy}} \dot{\tau}_{xy} + \frac{\partial F_c}{\partial \epsilon_{eq}} \dot{\epsilon}_{eq} = 0, \quad \text{これより}$$

$$\lambda = \frac{a \dot{\epsilon}_x + b \dot{\epsilon}_y + d_3 \dot{\gamma} - d (E_c' / E_c) \dot{\epsilon}_{eq}}{a^2 + b^2 + d_3^2 c^2} \quad (3), \quad \text{こゝに } d_3 = \frac{G_c}{E_c},$$

よって式(2)よりコンクリートの応力増分-歪増分関係式はつぎのように得られる。

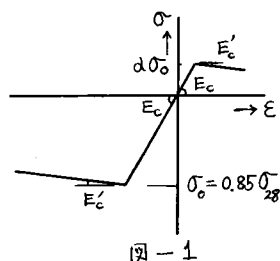


図-1

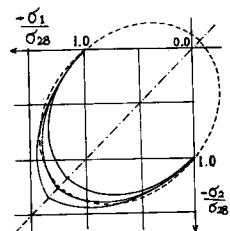


図-2

$$\frac{1}{E_c} \begin{Bmatrix} \ddot{\sigma}_x \\ \ddot{\sigma}_y \\ \ddot{\tau}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (1-a\bar{\sigma}_1), -a\bar{\sigma}_2, -a\bar{\sigma}_3 \\ -b\bar{\sigma}_1, (1-b\bar{\sigma}_2), -b\bar{\sigma}_3 \\ -c\bar{\sigma}_1, -c\bar{\sigma}_2, (1-c\bar{\sigma}_3) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_x \\ \dot{\varepsilon}_y \\ \dot{\gamma} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_1 &= \frac{1}{a^2+b^2+d_3C^2} \left\{ a - d(E'_c/E_c)(4.5 + \frac{6.05E_x+3.4938E_y}{f(E_x, E_y, \gamma)}) \right\} \\ \bar{\sigma}_2 &= \frac{1}{a^2+b^2+d_3C^2} \left\{ b - d(E'_c/E_c)(4.5 + \frac{6.05E_x+3.4938E_y}{f(E_x, E_y, \gamma)}) \right\} \\ \bar{\sigma}_3 &= \frac{1}{a^2+b^2+d_3C^2} \left\{ d_3C - 5.1124d(E'_c/E_c) \frac{\gamma}{f(E_x, E_y, \gamma)} \right\} \end{aligned}$$

$$\text{こゝに } f(E_x, E_y, \gamma) = \sqrt{1.21(E_x^2 + E_y^2) + 1.39752E_xE_y + 1.02248\gamma^2},$$

ただし式(4)は $F_c = 0$ and $\lambda = \bar{\sigma}_1\dot{\varepsilon}_x + \bar{\sigma}_2\dot{\varepsilon}_y + \bar{\sigma}_3\dot{\gamma} > 0$ の時のみ有効であり, $F_c < 0$ or $F = 0$ and $\lambda \leq 0$ の時は $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_3 = 0$ としなければならない。

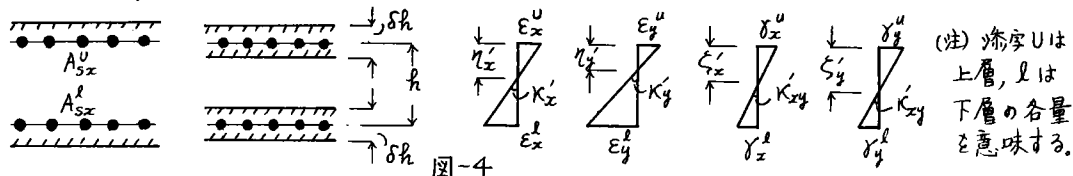
つぎに、鉄筋における応力増分-歪増分関係式の誘導については、鉄筋は直応力 S とせん断応力 t のみが作用するものと仮定し、Mises の降伏条件式に従う歪硬化を有する弾塑性体と仮定し、Yield function $F_s = S^2 + 3t^2 - \sigma_y^2 (C_1 + C_2 \varepsilon_{eq})^2$ (5) とおく。こゝに C_1, C_2 は図-3に示す歪硬化係数であり、 σ_y は一軸降伏応力、 $\varepsilon_{eq} = \sqrt{\varepsilon_s^2 + \frac{3}{4}\gamma^2}$ である。コンクリートの場合と同様な手順により、応力増分-歪増分関係式はつぎのように得られる。

$$\frac{1}{E_s} \begin{Bmatrix} \dot{S} \\ \dot{t} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (1-2Sg_1), -2Sg_2 \\ -6\beta_3 t g_1, (1-6\beta_3 t g_2) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_s \\ \dot{\gamma} \end{Bmatrix} \quad \begin{aligned} g_1 &= \frac{1}{4S^2+36\beta_3 t^2} \left\{ 2S - \frac{2C_2\sigma_y^2(C_1+C_2\varepsilon_{eq})E_s}{E_s E_{eq}} \right\} \\ g_2 &= \frac{1}{4S^2+36\beta_3 t^2} \left\{ 6\beta_3 t - \frac{3C_2\sigma_y^2(C_1+C_2\varepsilon_{eq})t}{2E_s E_{eq}} \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

式(6)は $F_s = 0$ and $\lambda_s = g_1\dot{\varepsilon}_s + g_2\dot{\gamma} > 0$ (7) の時のみ成立し, $F_s < 0$ or $F_s = 0$ and $\lambda_s < 0$ の時は $g_1 = g_2 = 0$ としなければならない。

3. 鉄筋コンクリート床板のたわみ増分に関する基礎方程式

床板は図-4に示すようなサンドウィッチ板として取り扱い、板厚方向のせん断応力の影響を無視する。無次元量 $\eta_x = \eta'_x/h$, $\eta_y = \eta'_y/h$, $\xi_x = \xi'_x/h$, $\xi_y = \xi'_y/h$, $K_x = hK'_x$, $K_y = hK'_y$, $K_{xy} = hK'_{xy}$, $p_x^u = A_{sx}^u/h$, $p_x^l = A_{sx}^l/h$, $p_y^u = A_{sy}^u/h$, $p_y^l = A_{sy}^l/h$, $w = W/h$ (W はたわみ), $x = X/L$, $y = Y/L$ (X, Y は直交座標軸で、鉄筋方向と一致させる, L は基準長) を導入すれば、



$$\{E_u\} = [\varepsilon_x^u, \varepsilon_y^u, \gamma_x^u, \gamma_y^u]^T = [\eta_x K_x, \eta_y K_y, \xi_x K_{xy}, \xi_y K_{xy}]^T, \text{ 以下これを } \{\eta K\} \text{ と表わす。}$$

$$\{E_l\} = [\varepsilon_x^l, \varepsilon_y^l, \gamma_x^l, \gamma_y^l]^T = [\eta_x K_x, \eta_y K_y, \xi_x K_{xy}, \xi_y K_{xy}]^T - [K_x, K_y, K_{xy}, K_{xy}]^T$$

$$\{\dot{E}_u\} = \{\dot{\eta} K\} + \{\eta \dot{K}\}, \quad \{\dot{E}_l\} = \{\dot{\eta} K\} + \{\eta \dot{K}\} - \{\dot{K}\} \quad (7), \text{ よって式(4)より,}$$

$$\frac{1}{E_c} \begin{Bmatrix} \ddot{\sigma}_x^u \\ \ddot{\sigma}_y^u \\ \ddot{\tau}_{xy}^u \end{Bmatrix} = \frac{1}{E_c} \begin{Bmatrix} \sigma_x^u \\ \sigma_y^u \\ \tau_{xy}^u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (1-a_u\bar{\sigma}_1^u), -a_u\bar{\sigma}_2^u, -a_u\bar{\sigma}_3^u, -a_u\bar{\sigma}_3^u \\ -b_u\bar{\sigma}_1^u, (1-b_u\bar{\sigma}_2^u), -b_u\bar{\sigma}_3^u, -b_u\bar{\sigma}_3^u \\ -d_g C_u \bar{\sigma}_1^u, -d_g C_u \bar{\sigma}_2^u, d_g(1-C_u \bar{\sigma}_3^u), d_g(1-C_u \bar{\sigma}_3^u) \\ -d_g C_u \bar{\sigma}_1^u, -d_g C_u \bar{\sigma}_2^u, d_g(1-C_u \bar{\sigma}_3^u), d_g(1-C_u \bar{\sigma}_3^u) \end{Bmatrix} [\{\dot{\eta} K\} + \{\eta \dot{K}\}] \quad (8)$$

$$\frac{1}{E_c} \{\dot{\sigma}_x\} = [\text{式(8)の係数行列の添字 } U \text{ を } l \text{ にしたものを}] [\{\dot{\eta}K\} + \{\eta\dot{K}\} - \{\dot{K}\}] \quad (9)$$

$$\frac{1}{E_s} \{\dot{S}_0\} = \frac{1}{E_s} \begin{Bmatrix} \dot{S}_x^U \\ \dot{S}_y^U \\ \dot{t}_{xy}^U \\ \dot{t}_{yx}^U \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-2S_x^U g_{1x}^U), & 0, & -2S_x^U g_{2x}^U, & 0 \\ 0, & (1-2S_y^U g_{1y}^U), & 0, & -2S_y^U g_{2y}^U \\ -6\beta_y t_{xy}^U g_{1x}^U, & 0, & \beta_y (1-6t_{xy}^U g_{2x}^U), & 0 \\ 0, & -6\beta_y t_{xy}^U g_{1y}^U, & 0, & \beta_y (1-6t_{xy}^U g_{2y}^U) \end{bmatrix} [\{\dot{\eta}K\} + \{\eta\dot{K}\}] \quad (10)$$

$$\frac{1}{E_s} \{\dot{S}_y\} = [\text{式(10)の係数行列の添字 } U \text{ を } l \text{ にしたものを}] [\{\dot{\eta}K\} + \{\eta\dot{K}\} - \{\dot{K}\}] \quad (11)$$

つぎに、断面力としては曲げモーメント M と膜力 N が同時に作用するものと考えられるから、

$$\{\dot{M}\} = [\dot{M}_x, \dot{M}_y, \dot{M}_{xy}, -\dot{M}_{yx}]^T = \frac{h^2}{2} [\delta\{\dot{\sigma}_x\} - \delta\{\dot{\sigma}_y\} + [C_{sl}]\{\dot{S}_0\} - [C_{su}]\{\dot{S}_u\}]^T \quad (12)$$

$$\{\dot{N}\} = [\dot{N}_x, \dot{N}_y, \dot{N}_{xy}, -\dot{N}_{yx}]^T = h [\delta\{\dot{\sigma}_y\} + \delta\{\dot{\sigma}_x\} + [C_{su}]\{\dot{S}_u\} + [C_{sl}]\{\dot{S}_l\}]^T \quad (13)$$

こゝに $[C_{su}], [C_{sl}]$ は C_{sx}^U, C_{sy}^U または C_{sx}^L, C_{sy}^L からなる対角行列である。膜力 N に関しては応力関数 ψ , $\frac{1}{hE_c} \{\dot{N}\} = [\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x}]^T$, これを $\{\dot{\psi}_{ij}\}$ と表わす、を導入すれば、式(8) ~ 式(11) と式(13) よりつぎの関係式を得る。

$$[A]\{\eta K\} - [B]\{\dot{K}\} = \{\dot{\psi}_{ij}\} \quad \therefore \{\eta K\} = [A]^{-1}[B]\{\dot{K}\} + [A]^{-1}\{\dot{\psi}_{ij}\} \quad (14)$$

こゝに $[A], [B]$ は $\{\sigma_u\} \sim \{\sigma_l\}$, $a_u \sim c_l$, $\bar{x}_1^U \sim \bar{x}_3^L$, $g_{1x}^U \sim g_{2y}^L$, $\{\eta\}$, によって定まる行列である。つぎに、上下層における歪適合条件式は板厚中央の歪に関するつぎの方程式⁽³⁾によって満足できる。

$$\frac{\partial^2 \bar{\epsilon}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{\epsilon}_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \bar{\epsilon}_x}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \bar{\epsilon}_y}{\partial y \partial x} = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (15)$$

$\{\bar{\epsilon}\} = \{\eta K\} + \{\eta\dot{K}\} - 0.5\{\dot{K}\}$ なる関係と式(14)とにより式(15)は

$$[D_{xy}]\{C_l\}\{\dot{K}\} + [D_{xy}]\{C_l\}^{-1}\{\dot{\psi}_{ij}\} = -\{K_0\}^T \{\dot{K}\} \quad (16)$$

こゝに、 $[D_{xy}] = (\frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, -\frac{\partial^2}{\partial y \partial x})$, $\{K_0\}^T = (K_y, K_x, -K_{xy}, -K_{yx})$

つぎに曲げモーメント増分と荷重増分に関するつぎの方程式⁽³⁾

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \dot{M}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{M}_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \dot{M}_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \dot{M}_{yx}}{\partial y \partial x} = & -\dot{p}L^2 - \dot{N}_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \dot{N}_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\dot{N}_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \dot{N}_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \dot{N}_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ & - 2\dot{N}_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad \text{式(8) ~ 式(12) より} \end{aligned}$$

$$[D_{xy}]\{E_1\}\{\dot{K}\} + [D_{xy}]\{E_2\}\{\dot{\psi}_{ij}\} = -\frac{2L^2}{E_c h^2} \dot{p} - 2\{K_l\}^T \{\dot{\psi}_{ij}\} - 2\{\psi_{ij}\}^T \{\dot{K}\} \quad (17)$$

こゝに、 $[D_{xy}] = (\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, -\frac{\partial^2}{\partial y \partial x})$, 式(16)と式(17)がこゝで考えている鉄筋コンクリート床板のたわみ増分に関する基礎方程式である。この式は変厚弾性板の方程式に類似しており、解析的に解くことは困難であると思われるので、こゝでは差分方程式に直して解く方法を考える。式(16), (17)の係数行列 $[C_l]$, $[A]^{-1}$, $[E_1]$, $[E_2]$ は座標の関数であり、弾塑性境界線上で不連続な値をもつが、 $([E_1]\{\dot{K}\})$, $([E_2]\{\dot{\psi}_{ij}\})$, $([C_l]\{\dot{K}\})$, $([A]^{-1}\{\dot{\psi}_{ij}\})$ は、モーメント、膜力の連続性により、連続関数と考えられるから、これらを未知変数と考えて差分表示し、所定の境界条件式と合わせると、 $\dot{w}$, $\dot{f}$ に関するつぎの連立方程式を得る。

$$[C_a]\{\dot{w}\} = -\frac{2\Delta h^4}{E_c h^4} \{\dot{p}\} - [C_b]\{\dot{f}\}, \quad [C_d]\{\dot{f}\} = -[C_e]\{\dot{w}\},$$

こゝに Δh は網目間隔であり、各係数行列は網目の数と同じ行列数をもつマトリックスである。

最後に、この両式を解けば求むべき未知量 $\{\dot{w}\}, \{\dot{\varphi}\}$ は

$$\{\dot{w}\} = -\frac{24\delta^4}{E_c R^4} [C_0]^{-1} \{\dot{p}\}, \quad [C_0] = [C_a] - [C_b][C_d]^{-1}[C_e] \quad (18)$$

$$\{\dot{\varphi}\} = \frac{24\delta^4}{E_c R^4} [C_d]^{-1}[C_e][C_0]^{-1}\{\dot{p}\} \quad (19)$$

4. 数値計算手順

荷重増分法より板中央点のたわみ増分を与えて、荷重増分を未知数とする（いわゆるたわみ増分法の方が好都合であるものと推測される）。初期値は弾性解から決定し、以下の順序で計算する。

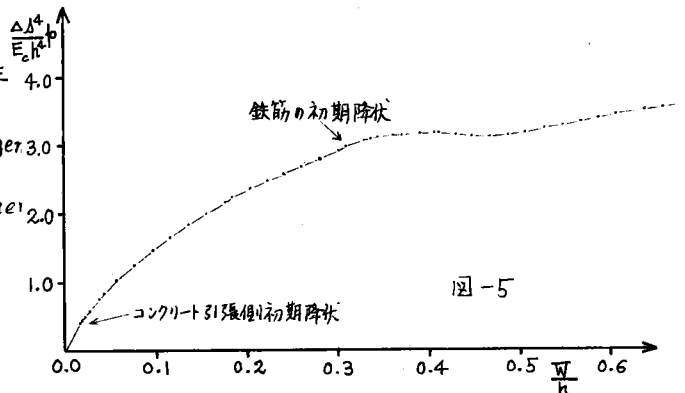
STEP 1; 式(18), 式(19)の係数行列を初期値より決定し、板中央点のたわみ増分を適当（できるだけ小さい方がよいが、それだけ計算時間が長くなる）に与えて、 $\{\dot{w}\}, \{\dot{\varphi}\}$ を求める。STEP 2; $\{\dot{u}\}, \{\dot{f}_x\}, \{\dot{v}\}$ を計算し、式(8)～(11)より応力増分を求め、これと初期値とを加算し、弾性状態にある網目において降伏条件式を犯していないか調べる。もしいくつかの網目で犯しておれば、ある許容誤差範囲内で満足するようにたわみ増分を減少させ、それに伴って荷重増分、応力増分、曲率増分、応力関数値増分、中立軸の変化量を比例的に減少させる。STEP 3; 応力増分、曲率増分などの増分量の $1/2$ をそれぞれの初期値に加え、これらの値により式(18), 式(19)の係数行列を修正し、STEP 1, STEP 2 の計算をやり直し、STEP 4 に進む。STEP 4; 塑性状態にある網目に対して式(3), 式(7)を用いて Unloading の check を行なう。Unloading が起っている点、は弾性領域と考えて式(18), 式(19)の係数行列を修正して STEP 1～STEP 2 を再度計算する。STEP 5; 応力増分、曲率増分などのすべての増分量をそれぞれの初期値に加算し、それを新しい初期値とする。これで 1 cycle の計算が終了し、所望のたわみ量が求まるまでこの cycle を繰り返す。

5. 計算例

簡単な例題として等分布荷重を受ける周辺単純支持（膜力に対しても自由）した正方形板をとり上げた。鉄筋量は上、下層、X, Y 両方向とも等しく、 $\rho_x^u = \rho_x^l = \rho_y^u = \rho_y^l = 0.0157$ であり、 $\sigma_{28} = 294 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma_y = 2700 \text{ kg/cm}^2$, $E_c = 0.3 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $E_s = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $E_c' = 0.0$, $E_s' = 0.01 E_s$, $R/L = 0.024$ (L はスパン長), $\delta = 0.3$ の諸条件の下で、差分の網目数を板の $1/4$ 領域に対して 5×5 、たわみ増分量の最大値を $0.02R$ として計算した結果を図-5に示す。なお、この計算例では数値計算手順の STEP 3 の反復計算は省略している。

参考文献

- (1) 色部; 直交異方性長方形板の弾塑性曲げ, 土木学会年次学術講演会, 昭44.9
- (2) H. Weigler, G. Becker; Untersuchungen über das Bruch- und Verformungsverhalten von Beton bei zweiachsiger Beanspruchung, Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin 1963
- (3) CH. Massonnet; General theory of Elasto-Plastic Membrane-Plates, Engineering Plasticity, Cambridge Univ. Press, 1968.



- (4) 岡村, 吉田; Membrane Action を有する矩形板の弾塑性解析, 土木学会年次学術講演会, 昭和 45.11.