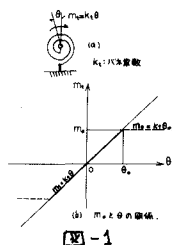


I-171 バネ支持された薄肉ばりのねじりについて.

大阪市立大学 正員 倉田 宗章
明石工業高専 正員 高 端 宏 直

1. まえがき……ねじり角 θ と抵抗モーメント m_t が比例関係にあるようなバネ(バネ定数 k_t)に連続的に支持された薄肉ばりのねじりについて解析した. 無限長と有限長の場合について, 集中トルク M_t が作用したときの角変位や種々のねじりモーメントを求め, バネ定数, ねじり剛性 GJ , 曲げねじり剛性 EC_w による影響を検討した. おわりにバネが塑性化して図-1のように $m_t-\theta$ 曲線がBilinearになった場合についても調べた.

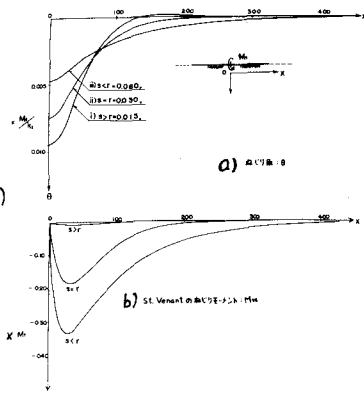


2. 基礎微分方程式と一般解……微分方程式はVlasov¹⁾やHetényi²⁾らによって求められているように弾性床上的にはりに曲げと軸力が作用した場合に類似している.

$$\theta'' - 2r^2\theta'' + \Delta^4\theta = 0 \quad (r^2 = GJ/2EC_w, \Delta^4 = k_t/EC_w) \quad (1)$$

特性方程式を解き一般解を求めると次の通り.

$$\begin{aligned} \text{i) } \Delta > r: & \theta = C_1 \cosh \alpha x \sin \beta x + C_2 \cosh \alpha x \cos \beta x + C_3 \sinh \alpha x \cos \beta x + C_4 \sinh \alpha x \sin \beta x \\ & = e^{\alpha x} (A_1 \sin \beta x + A_2 \cos \beta x) + e^{-\alpha x} (A_3 \sin \beta x + A_4 \cos \beta x), \\ \text{ii) } \Delta = r: & \theta = C_1 \sinh rx + C_2 \cosh rx + C_3 x \cosh rx + C_4 x \sinh rx \\ & = A_1 e^{rx} + A_2 x e^{rx} + A_3 e^{-rx} + A_4 x e^{-rx}, \\ \text{iii) } \Delta < r: & \theta = C_1 \sinh \mu_1 x + C_2 \cosh \mu_1 x + C_3 \sinh \mu_2 x + C_4 \cosh \mu_2 x \\ & = A_1 e^{\mu_1 x} + A_2 e^{\mu_2 x} + A_3 e^{-\mu_1 x} + A_4 e^{-\mu_2 x}, \\ \text{iv) } EC_w = 0: & \theta'' - r^2\theta = 0 \quad \text{より} \quad \theta = C_1 e^{rx} + C_2 e^{-rx} \end{aligned} \quad (2)$$



$$\text{ただし } \alpha = \sqrt{(\delta^2 + r^2)/2}, \beta = \sqrt{(\delta^2 - r^2)/2}, \mu_1 = \sqrt{r^2 + \sqrt{r^4 - \Delta^4}}, \mu_2 = \sqrt{r^2 - \sqrt{r^4 - \Delta^4}}, r^2 = k_t/GJ,$$

つぎに種々のねじりモーメントは次式で表わされる.

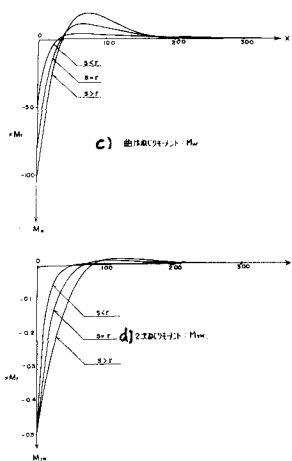
$$\text{St. Venantのねじりモーメント: } M_{ts} = GJ\theta', \text{ 曲げねじりモーメント: } M_w = EC_w\theta'',$$

$$2\text{次のねじりモーメント: } M_{tw} = -EC_w\theta''', \text{ 合ねじりモーメント: } M_{ti} = M_{ts} + M_{tw} \quad (3)$$

3. 無限長のばりに集中トルクが作用したとき(図-2)……一般解に

$$[\theta]_{x \rightarrow \infty} = 0, [\theta']_{x=0} = 0, M_t = 2 \int_0^\infty k_t \theta dx, \text{ の3つの条件を用いて諸量を求めると次のようになる.}$$

$$\begin{aligned} \text{i) } \Delta > r: & \theta = \frac{\Delta^2 M_t}{4\alpha k_t} A_x, M_{ts} = -\frac{r^2 M_t}{2\alpha\beta} B_x, M_w = \frac{M_t}{4\alpha} C_x, M_{tw} = -\frac{M_t}{2} D_x \\ \text{ただし } & A_x = e^{-\alpha x} \left(\frac{\alpha}{\beta} \sin \beta x + \cos \beta x \right), B_x = e^{-\alpha x} \sin \beta x, C_x = e^{-\alpha x} \left(\frac{\alpha}{\beta} \sin \beta x - \cos \beta x \right), \\ & D_x = e^{-\alpha x} (\cos \beta x + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta} \sin \beta x) \\ \text{ii) } \Delta = r: & \theta = \frac{r M_t}{4k_t} e^{-rx} (1 + rx), M_{ts} = -\frac{M_t}{2} r x e^{-rx}, M_w = \frac{M_t}{4r} e^{-rx} (rx - 1), M_{tw} = \frac{M_t}{4} e^{-rx} (rx - 2) \\ \text{iii) } \Delta < r: & \theta = \frac{\Delta^2 M_t}{2k_t \mu_1^2} (\mu_1 e^{-\mu_1 x} - \mu_2 e^{-\mu_2 x}), M_{ts} = \frac{r^2 M_t}{\mu_1^2 - \mu_2^2} (e^{-\mu_1 x} - e^{-\mu_2 x}), \\ & M_w = \frac{M_t}{2\mu_1^2} (\mu_2 e^{-\mu_2 x} - \mu_1 e^{-\mu_1 x}), M_{tw} = \frac{M_t}{2\mu_1^2} (\mu_2^2 e^{-\mu_2 x} - \mu_1^2 e^{-\mu_1 x}), \text{ 及び } \mu_1^2 = \mu_2^2 + r^2 \\ \text{iv) } EC_w = 0: & \theta = \frac{r M_t}{2k_t} e^{-rx}, M_{ts} = -\frac{M_t}{2} e^{-rx} \quad ([\theta]_{x \rightarrow \infty} = 0, M_t = 2 \int_0^\infty k_t \theta dx \text{ より}) \end{aligned} \quad (4)$$



上記の i), ii), iii) については $\Delta=0.03$ に対して $r=0.015, 0.03, 0.06$ の3つの例の状況を図-3に描いた。 θ は r が小さい場合が大きく、また k_t の値に大きく影響される。また $\Delta > r$ のときには弾性床上的のりの曲線のように θ がわずかであるが異を示す。 M_{ts} は r が大きいとき、 M_w と M_{sw} は r が小さくなときに大きい値を示す。 iv) の場合は図-4のようになり、せん断変形のみを考えた場合に相当する。 $x=0$ で θ' は不連続になる。

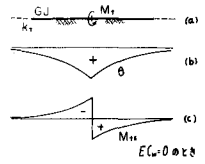


図-4

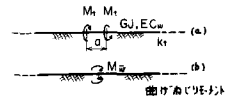


図-5

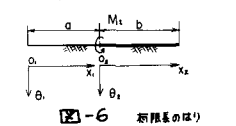


図-6 有限長のはり

4. 無限長のはりに曲げねじりモーメントが作用したとき……図-5のように2つの方向反対のトルクが作用した場合に相当する。(4)式を適用して θ を求める。

$$\begin{aligned} \text{i) } \theta &= \frac{\Delta^2 M_t}{4\alpha k_t} (-A_{x+a} + A_x) = -\frac{\Delta^2 M_t}{4\alpha k_t} a \left[\frac{A_{x+a} - A_x}{a} \right] = \frac{\Delta^2 M_w}{4\alpha k_t} B_x \\ \text{ii) } \theta &= \frac{r^3 M_w}{4k_t} x e^{-rx}, \quad \text{iii) } \theta = \frac{\Delta^2 M_w}{2k_t \mu^2} (e^{-\mu x} - e^{-\mu x}), \end{aligned} \quad (5)$$

5. 有限長のはり……図-6のようなときは2つの領域に分けて考えればよい。図-7に示した計算例は k_t, GJ, EC_w は一定で $a=b=l/2$ とし、両端固定の場合と両端単純支持(回転拘束)の場合である。3の計算例と同じ Δ と r の値である。諸量の傾向は3と同じであるが支持条件による影響が表われている。3と同様に $\Delta > r$ のときの M_{ts} の値が小さいようである。

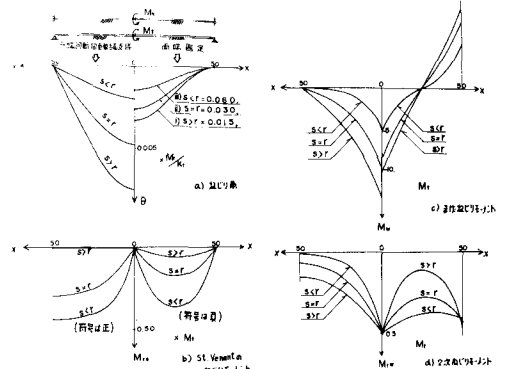


図-7

6. 基礎が塑性化する場合……図-1と8を参照して塑性化した領域と弾性域とに分けて、B点の不静定力 M_w と塑性域の長さ l_0 を未知数として、B点の θ' と M_{ts} の連続条件より求める。 M_{ts} はO点から塑性化するための荷重(そのときの角変位は θ_0)である。塑性域の部分はすでに解かれ、弾性域は半無限長のはり(d図)で(2)式より導いた。図-9は $n-l_0, n-M_w$ の関係を、図-10は $n-\theta_{max}$ の関係を示し、 $n > 1$ の部分が非線形の領域に入る。

7. あとがき……若干実際とは異なるが軌道を例にとって概算した。50Nレールで $k_t=10^6 \text{ kg/cm}^2$ 、 $EC_w=221.4 \times 10^6 \text{ kg/cm}^4$ 、 $GJ=130.5 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ として鉛直荷重 $P=9^+$ 、横圧 $0.4P$ として角変位(小変位)は $EC_w=0$ のときは 0.022 rad 、本法では 0.053 rad 、頭部の M_w による曲げ応

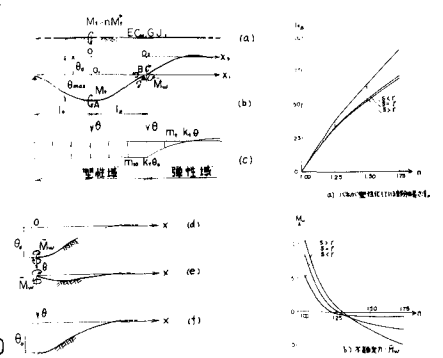


図-8 基礎が塑性化する場合

力度は 69.9 kg/cm^2 程度である。これが曲げと連成されると 1440 kg/cm^2 程度になることも考えられる。このように断面形状によっては EC_w による影響を考えなければならない。 Δ に比較して r が大きくなる (EC_w, k_t 一定のとき GJ が大きくなること) と曲げねじりの影響が少なくなる。

[参考文献] 1) V.Z.Vlasov: 奥村訳: 薄肉弾性ばりの理論。技報堂 昭42。

2) M.Hetényi: Beams on elastic foundation. The Univ. of Michigan Press. 1964

3) たかはし 小松: 薄肉構造物の理論と計算(4) 山海堂 昭44。

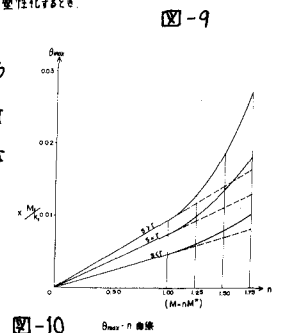


図-9