I-170　箱桁鋼床板の応力分布について

北海道開発局 土木試験所　正員　吉田紘一

1. はじめに

箱桁が曲げを受ける場合，フランジ巾が広くなると棒理論とは異なった応力分布を示してくる。この問題は一般にせん断遅れの問題として応力函数をもとめて解析されている．しかしこの方法では，リブの影響，荷重の巾員方向の位置による影響，さらに床板の曲げの問題などは解析できないわけである。ここではフランジを橋軸方向に長い矩形帯板に分割して折板理論により床板と桁とを一体としてして解析しようとするものである．

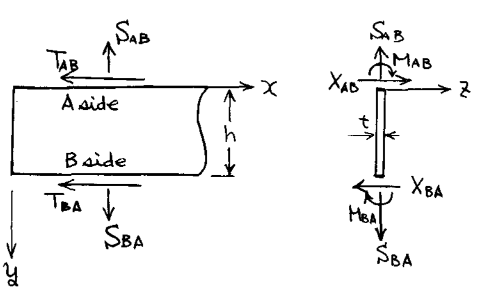
解析方法としてはフランジを巾員方向に縦リブの位置で矩形帯板に分割し，この分割点で力のつり合をとり，フランジの巾員方向にはフーリェ定和分変換，橋軸方向にはフーリェ変換を用いて計算を行なう。

2. 基本公式

2-1. 細長い帯板要素に関する公式[1,2,3]

細長い矩形帯板要素をとり，図-1のように座標 x, y, z をとりそれぞれの方向の変位を u, v, w, x 軸まわりの回転角を θ とし，帯板の縁 A, B でのせん断力 T，法線方向力 S について変位せん断公式を適用すると，式（1）のように表わされる．

$$\begin{bmatrix} \bar{T}_{AB} \\ \bar{T}_{BA} \\ S_{AB} \\ S_{BA} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} \dot{u}_A \\ \dot{u}_B \\ -v_A \\ v_B \end{bmatrix} \quad \cdots (1)$$



図－1

ただし

$$C_{11} = \frac{N}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \frac{Gt}{h}\frac{\alpha}{D^2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C_{12} = \frac{Gt\alpha}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C_{12} = C_{21}$$

$$C_{22} = \frac{Ght}{4}\alpha D^2 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \frac{N}{h^2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

上式中　$N = Eth$,　$\alpha = \dfrac{12E}{12E - Gh^2D^2}$,　$\dot{u} = \dfrac{du}{dx}$,　$\bar{T} = \int T\,dx$,　$D^2 = \dfrac{d^2}{dx^2}$

一方，曲げに関して帯板の縁 A, B についてモーメント M，せん断力 X は式（2）のようになる．

$$\begin{bmatrix} -X_{AB} \\ -X_{BA} \\ M_{AB} \\ M_{BA} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} C'_{11} & C'_{12} \\ \hline C'_{21} & C'_{22} \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} -w_A \\ w_B \\ \theta_A \\ \theta_B \end{bmatrix} \quad \cdots (2)$$

ただし、

$$C'_{11} = \left(\frac{12K}{h^2} - 2KD^2\right)\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} - \frac{Kh^2}{6}D^4\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix},$$

$$C'_{12} = C'_{21} = -\frac{6K}{h}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}, \qquad C'_{22} = 2K\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}.$$

上式中 $K = \dfrac{Et^3}{12h^2}$.

2-2、フーリエ定和分変換[4)]

関数 $f(x)$ のフーリエ定和分変換を次のように記す

$$S_i[f(x)] = \sum_{x=1}^{n-1} f(x)\sin\frac{i\pi}{n}x, \qquad C_i[f(x)] = \sum_{x=1}^{n-1} f(x)\cos\frac{i\pi}{n}x, \qquad (3),(4)$$

この逆変換はそれぞれ

$$f(x) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1} S_i[f(x)]\sin\frac{i\pi}{n}x, \qquad (5)$$

$$f(x) = \frac{2}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n-1}\Phi_i[f(x)]\cos\frac{i\pi}{n}x + \frac{1}{2}\Phi_n[f(x)](-1)^x + \frac{1}{2}\Phi_0[f(x)]\right\}, \qquad (6)$$

ただし $\Phi_i[f(x)] = C_i[f(x)] + \frac{1}{2}f(n)(-1)^i + \frac{1}{2}f(0)$.

また上の公式を用いると、

$$S_i[\Delta^2 f(r-1)] = -\sin\frac{i\pi}{n}\{(-1)^i f(n) - f(0)\} - D_i\cdot S_i[f(r)], \qquad (7)$$

$$S_i[\bar{\Delta} f(r-1)] = -2\sin\frac{i\pi}{n}\cdot\Phi_i[f(r)], \qquad (8)$$

$$C_i[\Delta^2 f(r-1)] = \Delta f(n-1)(-1)^i - \Delta f(0) - D_i\cdot\Phi_i[f(r)], \qquad (9)$$

$$C_i[\bar{\Delta} f(r-1)] = -\{\Delta f(n-1)(-1)^i + \Delta f(0)\} + \left(1+\cos\frac{i\pi}{n}\right)\{f(n)(-1)^i - f(0)\} + 2\sin\frac{i\pi}{n}S_i[f(r)]. \qquad (10)$$

ただし $\Delta f(r) = f(r+1) - f(r)$,

$\bar{\Delta} f(r-1) = f(r+1) - f(r-1)$,

$D_i = 2\left(1 - \cos\frac{i\pi}{n}\right)$.

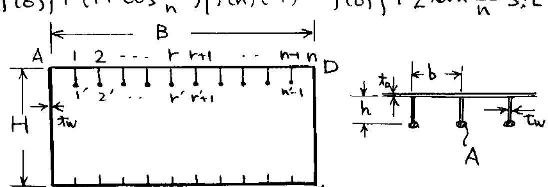


図-2

3. 格点における力のつり合

箱桁を図-2のように考え、縦リブで補強された床板の格点 r の力のつり合は(図-3)

$T_{r,r-1} + T_{r,r+1} + T_{r,r'} = 0$, (11)

$S_{r,r-1} - S_{r,r+1} + X_{rr'} = 0$, (12)

$X_{r,r-1} - X_{r,r+1} - S_{rr'} = P_r$, (13)

$M_{r,r-1} + M_{r,r+1} + M_{rr'} = 0$. (14)

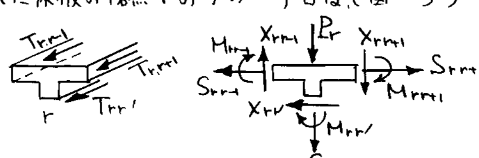


図-3

縦リブの先端 r' での力のつり合は先端のバルブの断面積Aを考慮すると

$T_{r'r} + f\ddot{u}_{r'} = 0$, (15) $\quad X_{r'r} = 0$, (16)

$S_{r'r} = 0$ (17), $\quad M_{r'r} - GJ\ddot{\theta}_{r'} = 0$. (18)

ただし $f = EA$, J: バルブのねじれ剛性.

式(11)〜式(18)に式(1),式(2)を代入し2差分式を作ると

$$\left(\frac{N_0}{6}+\frac{Gt_0\alpha_0}{b\cdot D^2}\right)\Delta^2 u_{r-1}+\left(N_0+\frac{N_1}{3}-\frac{Gt_1\alpha_1}{h\cdot D^2}\right)u_r+\left(\frac{N_1}{6}+\frac{Gt_1\alpha_1}{h\,D^2}\right)u_{r'}+\frac{Gt_0}{2}\alpha_0\Delta v_{r-1}+\frac{Gt_1}{2}\alpha_1(w_r+w_{r'})=0. \quad (19)$$

$$-\frac{Gt_0}{2}\alpha_0\Delta u_{r-1}-\left(\frac{N_0}{b}+\frac{Gbt_0\alpha_0}{4}D^2\right)\Delta^2 v_{r-1}-(Gbt_0\alpha_0D^2-c)v_r-c'v_{r'}-\frac{6K_1}{h}(\theta_r+\theta_{r'})=0. \quad (20)$$

$$\frac{Gt_1\alpha_1}{2}(u_r-u_{r'})+K_0\left(\frac{12}{b^2}-2D^2+\frac{b^2}{6}D^4\right)\Delta^2 w_{r-1}+\left(K_0b^2D^4+\frac{Ght_1}{4}\alpha_1D^2-\frac{N_1}{h^2}\right)w_r-\left(\frac{Ght_1\alpha_1}{4}D^2+\frac{N_1}{h^2}\right)w_{r'}$$
$$-\frac{6K_0}{b}\Delta\theta_{r-1}=P_r \quad (21)$$

$$-\frac{6K_0}{b}\Delta w_{r-1}+\frac{6K_1}{h}(v_r-v_{r'})+2K_0(\Delta^2\theta_{r-1}+6\theta_r)+4K_1\theta_r+2K_1\theta_{r'}=0. \quad (22)$$

$$\left(\frac{N_1}{6}+\frac{Gt_1\alpha_1}{h\,D^2}\right)u_r+\left(\frac{N_1}{3}-\frac{Gt_1\alpha_1}{h\,D^2}+f\right)u_{r'}-\frac{Gt_1}{2}\alpha_1(w_r+w_{r'})=0. \quad (23)$$

$$c'v_r-c\,v_{r'}+\frac{6K_1}{h}(\theta_r+\theta_{r'})=0. \quad (24)$$

$$\frac{Gt_1}{2}\alpha_1(u_r-u_{r'})-\left(\frac{Ght_1}{4}\alpha_1D^2+\frac{N_1}{h^2}\right)w_r-\left(\frac{Ght_1}{4}\alpha_1D^2-\frac{N_1}{h^2}\right)w_{r'}=0. \quad (25)$$

$$\frac{6K_1}{h}(v_r-v_{r'})+2K_1\theta_r+(4K_1-GJD^2)\theta_{r'}=0. \quad (26)$$

ただし $N_0=Et_0b$, $N_1=Et_1h$, $\alpha_0=\dfrac{12E}{12E-Gb^2D^2}$, $\alpha_1=\dfrac{12E}{12E-Gh^2D^2}$,

$K_0=\dfrac{Et_0^3}{12b^2}$, $K_1=\dfrac{Et_1^2}{12h^2}$, $c=K_1\left(\dfrac{12}{h^2}-2D^2+\dfrac{h^2}{3}D^4\right)$, $c'=K_1\left(\dfrac{12}{h^2}-2D^2-\dfrac{h^2}{6}D^4\right)$.

4. 変位の和分変換

式(19)〜式(26)をrの方向に定和分変換,xの方向に有限フーリエ変換して,

$$-\left\{\left(\frac{N_0}{6}-\frac{Gt_0\alpha_0}{b^2}\lambda^2\right)D_i-\left(N_0+\frac{N_1}{3}+\frac{Gt_1}{h}\alpha_1\lambda^2\right)\right\}S_i[u_{r\cdot m}]+\left(\frac{N_1}{6}-\frac{Gt_1}{h}\alpha_1\lambda^2\right)S_i[u_{r'}]-\frac{Gt_0\alpha_0}{2}\sin\frac{i\pi}{n}\,C_i[v_{r\cdot m}]$$
$$+\frac{Gt_1\alpha_1}{2}(S_i[w_{r\cdot m}]+S_i[w_{r'm}])=\left(\frac{N_0}{6}-\frac{Gt_0\alpha_0}{b^2}\lambda^2\right)\sin\frac{i\pi}{n}\left\{(-1)^i u_{n\cdot m}-u_{o\,m}\right\}. \quad (27)$$

$$-\frac{Gt_0}{2}\alpha_0\sin\frac{i\pi}{n}\cdot S_i[u_{r\cdot m}]-\left\{\left(\frac{Gbt_0}{4}\frac{\alpha_0}{\lambda^2}-\frac{N_0}{b^2}\right)D_i-\frac{Gbt_0}{\lambda^2}\alpha_0-c\right\}C_i[v_{r\cdot m}]-c'C_i[v_{r'\cdot m}]$$
$$-\frac{6K_1}{h}\left\{C_i[\theta_{r\cdot m}]+C_i[\theta_{r'\cdot m}]\right\}=\left\{S_{n\cdot m}(-1)^i+S_{o\cdot m}\right\}-\frac{Gt_0}{2}\alpha_0\left(1+\cos\frac{i\pi}{n}\right)\left\{u_{n\cdot m}(-1)^i-u_{o\,m}\right\}. \quad (28)$$

$$\left\{K_0\left(\frac{12}{b^2}+\frac{2}{\lambda^2}+\frac{b^2}{6\lambda^4}\right)D_i+\left(\frac{K_0b^2}{\lambda^4}+\frac{Ght_1}{4\lambda^2}\alpha_1-\frac{N_1}{h^2}\right)\right\}S_i[w_{r\cdot m}]+\left(\frac{Ght_1}{4\lambda^2}\alpha_1-\frac{N_1}{h^2}\right)S_i[w_{r'\cdot m}]+\frac{Gt_1}{2}\alpha\left(S_i[u_{r\cdot m}]-S_i[u_{r'\cdot m}]\right)$$
$$-\frac{12K_0}{b}\sin\frac{i\pi}{n}\,C_i[\theta_{r\,m}]=S_i[P_{r\cdot m}]+K_0\left(\frac{12}{b^2}+\frac{2}{\lambda^2}+\frac{b^2}{6\lambda^4}\right)\sin\frac{i\pi}{n}\left\{(-1)^i w_{n\,m}-w_{o\,m}\right\} \quad (29)$$

$$-\frac{12K_0}{b}\sin\frac{i\pi}{n}\cdot S_i[w_{r\cdot m}]+\frac{6K_1}{h}\left\{C_i[v_{r\cdot m}]-C_i[v_{r'\cdot m}]\right\}-(2K_0D_i-12K_0-4K_1)C_i[\theta_{r\cdot m}]+2K_1C_i[\theta_{r'\cdot m}]$$
$$=M_n(-1)^i+M_o+\frac{6K_0}{b}\left(1+\cos\frac{i\pi}{n}\right)\left\{w_n(-1)^i-w_o\right\}. \quad (30)$$

$$\left(\frac{N_1}{6}-\frac{Gt_1\alpha_1}{h}\lambda^2\right)S_i[u_{r\cdot m}]+\left(\frac{N_1}{3}+\frac{Gt_1}{h}\alpha_1\lambda^2+f\right)S_i[u_{r'\cdot m}]-\frac{Gt_1}{2}\alpha_1\left(S_i[w_{r\cdot m}]+S_i[w_{r'\cdot m}]\right)=0 \quad (31)$$

$$c'C_i[v_{r\cdot m}]-c\,C_i[v_{r'\cdot m}]+\frac{6K_1}{h}\left(C_i[\theta_{r\cdot m}]+C_i[\theta_{r'\cdot m}]\right)=\frac{1}{2}\left(X_{n'\cdot m}(-1)^i-X_{o'\cdot m}\right) \quad (32)$$

$$\frac{Gt_1}{2}\alpha_1\left(S_i[u_{r\cdot m}]-S[u_{r'\cdot m}]\right)+\left(\frac{Ght_1}{4\lambda^2}\alpha_1-\frac{N_1}{h^2}\right)S_i[w_{r\cdot m}]+\left(\frac{Ght_1}{4\lambda^2}\alpha_1+\frac{N_1}{h^2}\right)S_i[w_{r'\cdot m}]=0 \quad (33)$$

$$\frac{6K_1}{h}\left(C_i[v_{r\cdot m}]-C_i[v_{r'\cdot m}]\right)+2K_1C_i[\theta_{r\cdot m}]+\left(4K_1+\frac{GJ}{\lambda^2}\right)C_i[\theta_{r'\cdot m}]=\frac{1}{2}\left\{M_{n'\cdot m}(-1)^i+M_{o'\cdot m}\right\}. \quad (34)$$

上式中 $\lambda^2=\left(\dfrac{l}{m\pi}\right)^2$, $D_i=2\left(1-\cos\dfrac{i\pi}{n}\right)$,

$$S_i[P_{r\cdot m}]=\sum_{r=1}^{n-1}\int_0^l P_r\sin\frac{m\pi}{l}x\,dx\cdot\sin\frac{i\pi}{n}r.$$

式(27)〜式(34)の $S_i[u_{r.m}], \cdots, \Phi_i[v_{r.m}]\cdots$，は $u_r, \cdots, v_r, \cdots$ をそれぞれ和分変換および有限フーリエ変換したもので，これらは逆変換，$u_r=\frac{4}{n\ell}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n-1}S_i[u_{rm}]\sin\frac{m\pi}{\ell}x\,\sin\frac{i\pi}{n}r, \cdots$，
$v_r=\frac{4}{n\ell}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\sum_{i=1}^{n-1}\Phi_i[v_{r.m}]\underbrace{}_{\cos\frac{i\pi}{n}r}+\frac{1}{2}\Phi_n[v_{r.m}](-1)^r+\frac{1}{2}\Phi_0[v_{r.m}]\right\}\sin\frac{m\pi}{\ell}x, \cdots$ により各値を求める．

5．境界条件

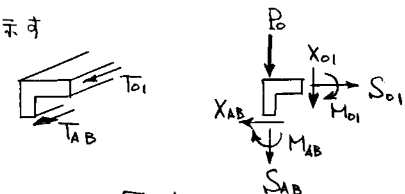
境界点A(格点0)における力のつり合を図－4に示す

$\bar{T}_{01}+\bar{T}_{AB}=0.$　　(35)

$S_{01}-X_{AB}=0.$　　(36)

$X_{01}+S_{AB}=-P_0$　　(37)

$M_{01}+M_{AB}=0$　　(38)



図－4

式(35)〜式(38)に式(1)，(2)を代入して有限フーリエ変換をほどこすと，

$$\left\{\frac{N_0}{3}+\frac{N_w}{3}+\left(\frac{Gt_0}{b}\alpha_0+\frac{Gt_w}{H}\alpha_w\right)\lambda^2\right\}u_{0.m}+\left(\frac{N_0}{6}-\frac{Gt_0}{b}\alpha_0\cdot\lambda^2\right)u_{1.m}+\left(\frac{N_w}{6}-\frac{Gt_w}{H}\alpha_w\lambda^2\right)u_{B.m}$$
$$+\frac{Gt_0}{2}\alpha_0(v_{0m}+v_{1.m})+\frac{Gt_w}{2}\alpha_w(w_{0.m}+w_{B.m})=0. \qquad (35)$$

$$S_{0.m}-K_w\left(\frac{12}{H^2}+\frac{2}{\lambda^2}-\frac{H^2}{3\lambda^4}\right)v_{0m}+K_w\left(\frac{12}{H^2}+\frac{2}{\lambda^2}+\frac{H^2}{6\lambda^4}\right)v_{B.m}-\frac{6K_w}{H}(\theta_{0m}+\theta_{B.m})=0 \qquad (36)$$

$$-\frac{Gt_w}{2}\alpha_w(u_{0m}-u_{0'.m})+\left\{K_0\left(\frac{12}{b^2}+\frac{2}{\lambda^2}-\frac{b^2}{6\lambda^4}\right)+\frac{GHt_w}{4}\frac{\alpha_w}{\lambda^2}-\frac{N_w}{H}\right\}w_{0m}-K_0\left(\frac{12}{b^2}+\frac{2}{\lambda^2}+\frac{b^2}{6\lambda^4}\right)w_{1.m}$$
$$+\left(\frac{N_w}{H^2}-\frac{GHt_w}{4}\frac{\alpha_w}{\lambda^2}\right)w_{B.m}+\frac{6K_0}{b}(\theta_{0m}+\theta_{1.m})=P_{0.m}. \qquad (37)$$

$$M_{0.m}+\frac{6K_w}{H}(v_{0.m}-v_{B.m})+2K_w(2\theta_{0m}+\theta_{Bm})=0. \qquad (40)$$

境界点D(格点n)および下フランジの境界点B，Cでも同様のつり合式が成立する，またリブ先端の各境界値 $M_{0'0}=M_{n'n}=X_{0'0}=X_{n'n}=0$ として式(27)〜式(34)の境界値を定めることができる．

上式中

$$u_{1.m}=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1}S_i[u_{rm}]\sin\frac{i\pi}{n}, \qquad v_{1.m}=\frac{2}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n-1}\Phi_i[v_{rm}]\cos\frac{i\pi}{n}+\frac{1}{2}\Phi_0[v_{rm}]+\frac{1}{2}\Phi_n[v_{rm}](-1)^r\right\}.$$
$$w_{1.m}=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1}S_i[w_{rm}]\sin\frac{i\pi}{n}, \qquad \theta_{1.m}=\frac{2}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n-1}\Phi_i[\theta_{rm}]\cos\frac{i\pi}{n}+\frac{1}{2}\Phi_0[\theta_{rm}]+\frac{1}{2}\Phi_n[\theta_{rm}](-1)^r\right\}.$$

また

$$u_{0.m}=\int_0^{\ell}u_0\sin\frac{m\pi}{\ell}x\,dx, \quad v_{0.m}=\int_0^{\ell}v_0\sin\frac{m\pi}{\ell}x\,dx, \quad w_{0.m}=\int_0^{\ell}w_0\sin\frac{m\pi}{\ell}x\,dx \quad \theta_{0.m}=\int_0^{\ell}\theta_0\sin\frac{m\pi}{\ell}x\,dx$$
$$P_{0m}=\int_0^{\ell}P_r\sin\frac{m\pi}{\ell}x\,dx,$$

以上式(35)〜式(38)を満足するように境界値，u_{0m}，w_{0m}，$v_{0.m}$，θ_{0m}，S_{0m}，$M_{0m}\cdots$を定めて式(27)〜式(34)を解き，逆変換を行なうことより，各格点の変位，断面力を求めることができる。

参考文献:

1) 尾崎 訒：折板構造解析による単一箱桁の曲げねじりについて，土木学会論文集 179号，1970年．

2) 能町，松岡，堀米：帯板を要素とする応力解析法(平板について)，土木学会北海道支部論文集 26号，1970年

3) 能町，松岡，田島：帯板を要素とする応力解析法(二次元応力について)，土木学会北海道支部論文集 26号 1970年

4) S.G.Nomach : On Finite Fourier Sine Series with respect to Finite Differences. Memoirs of the Muroran Institute of Tech Vol.5, No.7, 1965.