

1. はじめに： ここに用いた折板理論は、折板要素の面内応力も二次元応力として取扱ひ、板の曲げは断面方向のみを考慮したもので、すでに発表済みの弾性理論によるものであるが^{1), 2), 3)}その後、連続桁に応用した結果について報告する。

2. 計算の概要： 図-1. に示すような断面形状の桁を考える時 x, y, z 方向の三変位を u, v, w とし、 r 節点では添字 r をつけて表わす。このような構造を構成している各折板要素に対し、さきに誘導した変位せん断公式¹⁾を適用する。例えば、折板要素 rr' について示すと次のように表わされる。(図-2. 参照)

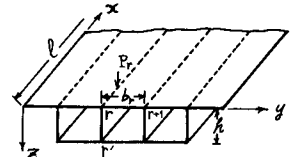


図-1. 折板構造

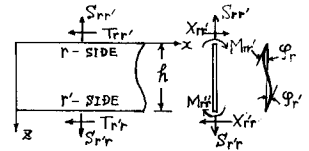


図-2. 折板要素と端力

$$\begin{Bmatrix} \bar{T}_{rr'} \\ \bar{T}_{r'r} \\ \bar{S}_{rr'} \\ \bar{S}_{r'r} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ \vdots & \vdots \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{u}_r \\ \dot{u}_{r'} \\ -w_r \\ w_{r'} \end{Bmatrix} \quad \text{ただし、} \quad \begin{aligned} C_{11} &= \frac{N_r}{\delta} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \frac{G J_r}{A D^2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ C_{12} &= \frac{V N_r}{2 \delta} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{G J_r}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ C_{22} &= \frac{N_r}{\delta} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{G J_r}{4} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

上式中 $N_r = \frac{E A T_r}{1-\nu^2}$, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, $\dot{u} = \frac{du}{dx}$, $\bar{T} = \int T dx$, $D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$ --- (1)

一方、稜線における断面方向の変形曲げモーメントを M 、それによるせん断力を X とすれば、図-2 に示すように稜線回転角を φ とし、次のように書ける。なお、開断面への適用も考慮し、サンパナンのねじり剛性 GJ を導入した。

$$\begin{Bmatrix} -X_{rr'} \\ -X_{r'r} \\ M_{rr'} \\ M_{r'r} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} \\ \vdots & \vdots \\ C'_{12} & C'_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -\varphi_r \\ \varphi_{r'} \\ \varphi_r \\ \varphi_{r'} \end{Bmatrix} \quad \text{ただし、} \quad \begin{aligned} C'_{11} &= \left(\frac{12 K_r}{\delta^2} - \frac{G J_r D^2}{\delta^2} \right) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ C'_{12} &= \frac{6 K_r}{\delta} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ C'_{22} &= 2 K_r \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \begin{aligned} K_r &= \frac{E t_r^3}{12(1-\nu^2)\delta} \\ J_r &= \frac{A t_r^3}{3} \left(1 - \frac{192}{\pi^4} \frac{t_r}{\delta} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} \tan \frac{n\pi h}{2t_r} \right) \end{aligned}$$

--- (2)

力のつりあいは、図-3. のように稜線 r において次のように書ける。この際、稜線位置に釘筋等の換算断面積 f_r を配置できるような考慮した。

$$\left. \begin{aligned} \bar{T}_{r,r-1} - \bar{T}_{r,r+1} + \bar{T}_{r,r'} + E f_r \dot{u}_r &= 0 \\ \bar{S}_{r,r-1} - \bar{S}_{r,r+1} + X_{rr'} &= Q_r \\ X_{r,r-1} - X_{r,r+1} - \bar{S}_{rr'} &= P_r \\ M_{r,r-1} + M_{r,r+1} + M_{rr'} &= \mathcal{M}_r \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (3)}$$

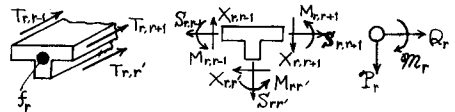


図-3. 稜線における力のつりあい

以上の結果として次式をうる。 $[A]\{u\} = \{L\}$ --- (4)

連続桁の場合も支向上の静定基本系に対しては、 $u = \sum_{m=1}^{\infty} U_m \sin \frac{m\pi x}{\ell}$ と表わされるので、スパン上の位置 x における変位 $\{u\}$ は、支承位置 C_i における支承上の節点力を $\{R_i\}$, $i=1, 2, \dots, n$ とすれば次式で表わされる。

$$\{u\} = \{u_L\} + \sum_{j=1}^n \{u_{R_j}\} \quad \text{式中、} \quad \begin{aligned} \{u_{R_j}\} &= \sum_{m=1}^{\infty} [A]^{-1} \{R_{j,m}\} \sin \frac{m\pi x}{\ell} \\ \{u_L\} &= \sum_{m=1}^{\infty} [A]^{-1} \{L_m\} \sin \frac{m\pi x}{\ell} \end{aligned} \quad \begin{aligned} \text{ただし、} \quad \{R_{j,m}\} &= \frac{\rho}{\ell} \{R_j\} \sin \frac{m\pi C_j}{\ell} \\ \text{其中：} \quad \{L_m\} &= \frac{\rho}{\ell} \{L\} \sin \frac{m\pi x_0}{\ell} \\ \text{等/2\pi} &= \frac{4}{m\pi} \{L\} \end{aligned}$$

--- (5)

未知量 $\{R_j\}$ は、 C_i 点における条件、 $\{u\} = \{\delta\}$ から求まるが、計算例として、三径間連続桁の支承上の断面内で剛に拘束されている要素端の変位 $\delta = 0$ と仮定すれば次のように計算できる。ただし、 $\{u_{R_i}^0\}$ 等は拘束条件を有する節点に単位力 $R_i = 1$ を与えた場合の変位であつて、

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = -[B]^{-1} \begin{Bmatrix} u_L^{C1} \\ u_L^{C2} \end{Bmatrix} \quad \text{式中} \quad \begin{cases} u_L^{C1} \\ u_L^{C2} \end{cases} = \sum_{m=1}^{\infty} [A]^{-1} \{L_m\} \sin \frac{m\pi C_1}{L} \quad \begin{cases} u_L^{C1} \\ u_L^{C2} \end{cases} = \sum_{m=1}^{\infty} [A]^{-1} \{L_m\} \sin \frac{m\pi C_2}{L} \quad [B] = \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_R^{C1} \\ u_R^{C2} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} u_L^{C1} \\ u_L^{C2} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \dots (6)$$

3. 数値計算例： 図-4, 5, 6 に計算結果の一例を示し、これから支承工隔壁の有無による相異を各種断面について見るこゝができる。たゞし、これらの結果は45項までの級数計算の値であつて、支承上に隔壁が無い場合にはさらに大きな値へと収斂するので、支承上に隔壁がない場合には支承工の曲げねじり応力は約3倍になるとみてよい。なお、図-5をみるこゝと、集中偶力を受けた場合、支承上の曲げねじり応力の大きさは問題にならないが影響線の結果から、支承上に生ずる最大曲げねじり応力は支間中央に生ずる最大値の20~30%さらに大きくなり、支承上の隔壁の有無による効果は約2倍であつた。また、断面変形の曲げモーメントにおいても、図-6のように、隔壁がない場合には支間中央の値を上回る大きな曲げモーメントが支承上に生じるこゝがわかる。

4. 単一箱橋の曲げねじり (連続橋)

上述の計算は大型計算機によらねばならない等の制約を受けるとで、連続単一箱橋に対し、解析的な計算をおこなひ、節点における曲げねじり応力、断面変形曲げモーメント、せん断流の計算式を次のようにして求めた。^{2)参照}

両端単純支持箱橋に対し、その支間内に隔壁

の変形抵抗抗力 Q_i と支承反力 R_j ($i, j=1, 2, \dots$) をとり、この Q_i, R_j を隔壁位置 i で $\Delta\psi = Q_i / G_i I_{ti}$ 、支承位置 j で変位 $w=0$ となつて $\psi + \frac{\Delta\psi}{2} = 0$ なる条件から次式で求める。たゞし、 ψ は箱断面の回転角、 $\Delta\psi$ は箱断面形の変形度である。($\psi + \frac{\Delta\psi}{2}$ はフランジ部材回転角)。

$$\begin{Bmatrix} \Delta\psi Q_i + \frac{1}{G_i I_{ti}} \\ \psi + \frac{\Delta\psi}{2} Q_i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\psi R_j \\ \psi + \frac{\Delta\psi}{2} R_j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_i \\ R_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta\psi^2 \\ \psi + \frac{\Delta\psi}{2} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

$$\text{式中、} \Delta\psi Q_i = \frac{K Q_i}{G \sqrt{nH}} \left\{ \frac{\sqrt{nH}+L}{2\alpha} \Xi(\beta_i, \beta) - \frac{\sqrt{nH}-L}{2\beta} \Xi(\beta_i, \beta) \right\}$$

$$\Delta\psi R_j = \frac{R_j}{G b h \sqrt{nH}} \left\{ \frac{\sqrt{nH}+J}{2\alpha} \Xi(\beta_j, \beta) - \frac{\sqrt{nH}-J}{2\beta} \Xi(\beta_j, \beta) \right\}$$

$$\psi + \frac{\Delta\psi}{2} Q_i = - \frac{Q_i}{G b h \sqrt{nH}} \left\{ \frac{\sqrt{nH}+J}{2\alpha} \Xi(\beta_i, \beta) - \frac{\sqrt{nH}-J}{2\beta} \Xi(\beta_i, \beta) \right\}$$

$$\begin{cases} n = \frac{4(1+\nu)}{bA} (K_A + K_B), & H = \frac{4\delta(1+\delta)}{(1+\nu)wbA} \\ 2K = \frac{1}{R t_2} + \frac{1}{R t_3} + \frac{2}{b t_1}, & F = 2K - \frac{4}{b t_1} \\ J = \frac{H}{2K-F}, & L = \frac{H}{2K}, & \alpha = \sqrt{\frac{nH+K}{2}} \\ F' = F - \frac{4}{b t_1}, & H' = \frac{nH^2 H}{F'}, & \beta = \sqrt{\frac{nH-K}{2}} \end{cases}$$

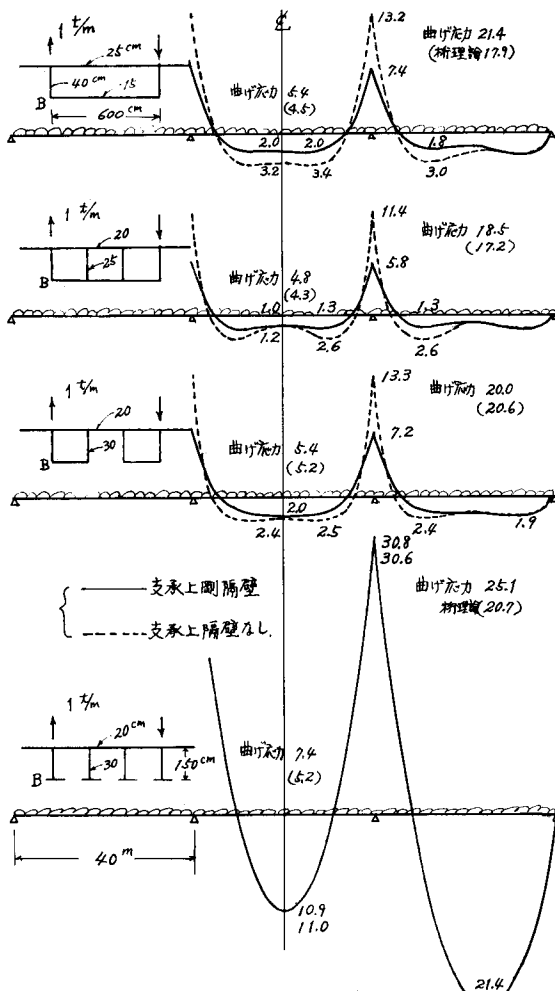


図-4. 三径間連続橋の曲げねじり応力: σ_{θ} (%a)
(満載等分布偶力が作用した場合) (B変)

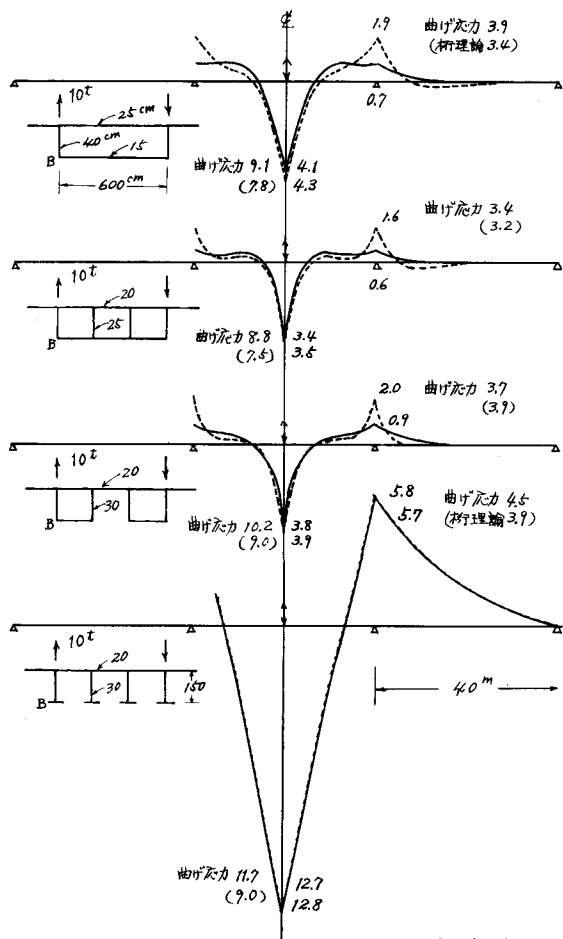


図-5. 三径間連続橋の曲げねじり力: σ_B (kg/cm²)
(支間中央に集中偶力が作用した場合)(B表)

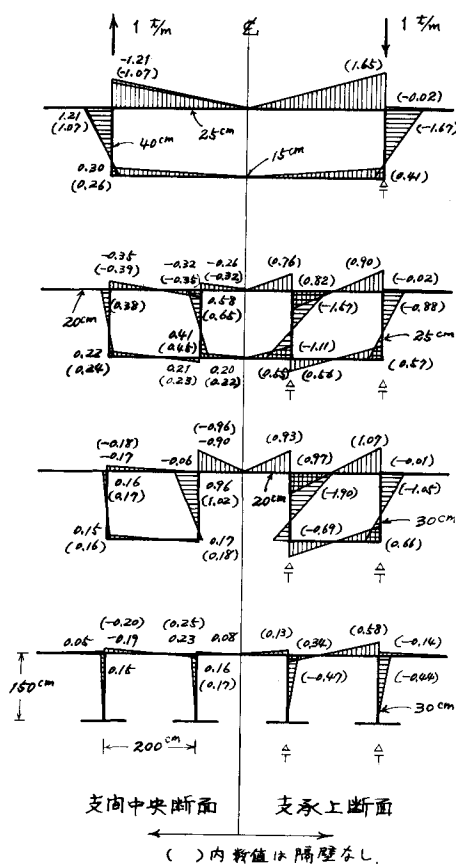


図-6. 三径間連続橋 (30x40m) の変形曲げモーメント
(満載等分布偶力作用時) : M (t.m/m)

$$\psi + \frac{4\psi}{2} R_i = \frac{F' R_i}{8 G R \sqrt{nH}} \left\{ \frac{\sqrt{nH} + H'}{2\alpha} \Xi(\beta_i, \beta) - \frac{\sqrt{nH} - H'}{2\beta} \Xi(\beta_i, \beta) \right\} + \frac{K R_i}{2 G R} (1 - \beta) \beta_i' \quad (8)$$

ただし、 $\beta = \frac{F}{G}$, $\beta_i = \frac{G_i}{G}$, $\beta_i' = \frac{G_i'}{G}$ で、 $\tilde{Q}_i, \tilde{Q}_i'$ はそれぞれ、 $\tilde{Q}_i = 1$, $\tilde{Q}_i' = 1$ とした単位力を表わす。

また、(7) 式中の荷重項は、集中偶力 P とおいて、等分布偶力 P/b に対して次のような値となる。

$$\Delta \psi P = \frac{P}{G R \sqrt{nH}} \left\{ \frac{\sqrt{nH} + J}{2\alpha} \Xi(\beta_0, \beta) - \frac{\sqrt{nH} - J}{2\beta} \Xi(\beta_0, \beta) \right\}$$

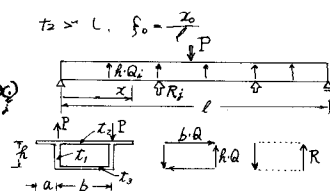
$$\psi + \frac{4\psi}{2} P = \frac{F' P}{8 G R \sqrt{nH}} \left\{ \frac{\sqrt{nH} + H'}{2\alpha} \Xi(\beta_0, \beta) - \frac{\sqrt{nH} - H'}{2\beta} \Xi(\beta_0, \beta) \right\} + \frac{K P}{2 G R} \beta_0 (1 - \beta)$$

$$\Delta \psi P = \frac{2P}{G R \sqrt{nH}} \left\{ \frac{1}{2\alpha\beta} (1 - \frac{KJ}{H}) \Xi(\beta_0) + \frac{J}{nH} (1 - \Xi(\beta_0)) \right\}$$

$$\psi + \frac{4\psi}{2} P = \frac{F' P}{4 G R} \left\{ \frac{1}{2\alpha\beta} (1 - \frac{KJ}{H}) \Xi(\beta_0) + \frac{H'}{nH} (1 - \Xi(\beta_0)) \right\} + \frac{K P}{2 G R} \frac{(1 - \beta) \beta_0}{2} \quad (9)$$

なお、式中的 $\Xi(\beta_0, \beta)$, $\Xi(\beta_0, \beta)$ の値については、紙面の都合で省略する。(文献2)参照)。

ただし、等分布荷重に因る $\Xi(\beta_0)$, $\Xi(\beta_0)$ は、次頁に示す $\Xi(\beta)$, $\Xi(\beta)$ において $\beta = \beta_0$, $\beta = \beta_0$ とおけばよい。



した。また、いよいよ、隔壁の変形抵抗力 Q_i および、床の支承力反力 R_j による影響値は、曲げねじり応力、変形曲げモーメント、せん断流に対して、それぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned} \sigma_A^{Q_i} &= -\frac{12 Q_i}{\omega} \left\{ \frac{1}{2\alpha} \Phi(f_i, f) - \frac{1}{2\beta} \Psi(f_i, f) \right\} \\ M_A^{Q_i} &= -\frac{2(1+\nu) K Q_i}{\sqrt{nH}} \left\{ \frac{\sqrt{nH}+J}{2\alpha} \Phi(f_i, f) - \frac{\sqrt{nH}-J}{2\beta} \Psi(f_i, f) \right\} \\ T_{AB}^{Q_i} &= -\frac{2t_2 b R_i}{\omega} \left\{ C(f_i, f) - \frac{nK}{2\alpha\beta} S(f_i, f) \right\} + Q_i (1-f_i) \\ &\quad - nK R_i \left\{ \frac{1}{2\alpha\beta} (1 - \frac{KL}{H}) S(f_i, f) - \frac{L}{nH} (C(f_i, f) - 2(1-f_i)) \right\} \\ \sigma_A^{R_j} &= -\frac{6 R_j}{\omega K \sqrt{nH}} \left\{ \frac{\sqrt{nH}+nH}{2\alpha} \Phi(f_j, f) - \frac{\sqrt{nH}-nH}{2\beta} \Psi(f_j, f) \right\} \\ M_A^{R_j} &= -\frac{2(1+\nu) R_j}{b K t_1 \sqrt{nH}} \left\{ \frac{\sqrt{nH}+J}{2\alpha} \Phi(f_j, f) - \frac{\sqrt{nH}-J}{2\beta} \Psi(f_j, f) \right\} \\ T_{AB}^{R_j} &= -\frac{b t_2 R_j}{\omega K} \left\{ C(f_j, f) + \frac{n(F-K)}{2\alpha\beta} S(f_j, f) \right\} \\ &\quad - \frac{n R_j}{b K t_1} \left\{ \frac{1}{2\alpha\beta} (1 - \frac{KJ}{H}) S(f_j, f) - \frac{J}{nH} (C(f_j, f) - 2(1-f_j)) \right\} \end{aligned} \quad \dots (10)$$

その結果次のように求まる。

$$\begin{aligned} \sigma_A &= \sigma_A^P + \sum_i \sigma_A^{Q_i} + \sum_j \sigma_A^{R_j}, \quad \sigma_B = -\gamma \sigma_A \\ M_A &= M_A^P + \sum_i M_A^{Q_i} + \sum_j M_A^{R_j}, \quad M_B = \frac{K\gamma}{K_A} M_A \\ T_{AB} &= T_{AB}^P + \sum_i T_{AB}^{Q_i} + \sum_j T_{AB}^{R_j}, \quad \gamma = \frac{3bt_1 + bt_2 + 16f}{3bt_1 + bt_2} \\ T_{AB} &= T_{AB}^P + \sum_i T_{AB}^{Q_i} + \sum_j T_{AB}^{R_j}, \quad \dots (11) \end{aligned}$$

集中荷重に対する $\sigma_A^P, M_A^P, T_{AB}^P$ は文献(2)の通りであるが、等分布荷重に対して次のようになる。

$$\begin{aligned} \sigma_A^P &= \frac{12P}{\omega K} \left\{ \frac{1}{2\alpha\beta} (1 - \frac{K nH}{H}) \Phi(f) + \frac{H}{H} (1 - \Phi(f)) \right\} \\ M_A^P &= K \frac{4(1+\nu)t_1}{b K t_1} \left\{ \frac{1}{2\alpha\beta} (1 - \frac{KJ}{H}) \Phi(f) + \frac{J}{nH} (1 - \Phi(f)) \right\} \\ T_{AB}^P &= \frac{2bt_2 P}{\omega K} \left\{ \frac{1}{2\alpha} (\frac{H\sqrt{nH}}{H} + 1) S(f) + \frac{1}{2\beta} (\frac{H\sqrt{nH}}{H} - 1) C(f) \right\} \\ &\quad + \frac{2P}{b K t_1 H} \left\{ \frac{\sqrt{nH}+J}{2\alpha} S(f) + \frac{\sqrt{nH}-J}{2\beta} C(f) + J(\frac{f}{2} - x) \right\} \end{aligned} \quad \dots (12)$$

$$\begin{aligned} \Phi(f) &= \frac{\sinh \alpha \pi (1-f) \sin \beta \pi f + \sinh \alpha \pi f \sin \beta \pi (1-f)}{\cosh \alpha \pi + \cos \beta \pi} \\ \Psi(f) &= \frac{\cosh \alpha \pi (1-f) \cos \beta \pi f + \cosh \alpha \pi f \cos \beta \pi (1-f)}{\cosh \alpha \pi + \cos \beta \pi} \\ S(f) &= \frac{\sinh \alpha \pi (1-f) \cos \beta \pi f - \sinh \alpha \pi f \cos \beta \pi (1-f)}{\cosh \alpha \pi + \cos \beta \pi} \\ C(f) &= \frac{\cosh \alpha \pi (1-f) \sin \beta \pi f - \cosh \alpha \pi f \sin \beta \pi (1-f)}{\cosh \alpha \pi + \cos \beta \pi} \end{aligned} \quad \dots (13)$$

本研究の実施に当り、能町純雄教授には終始ご指導をいただきました。本稿の作成の際には、西田久技官の協力を得ました。ここに記して深く感謝の意を表します。

- 1) 能町純雄, 尾崎 詔, 杉野 啓: 断面変形を考えた二室箱橋の応力解析について, 土木学会北海道支部, 論文集24号, 昭42.
- 2) 尾崎 詔: 折板構造解析による単一箱橋の曲げねじりについて, 土木学会論文報告集 179号, 昭45.7.
- 3) 尾崎 詔: 折板構造解析によるコンクリート桁橋の応力について, 土木学会北海道支部, 研究発表論文集27号, 昭45.

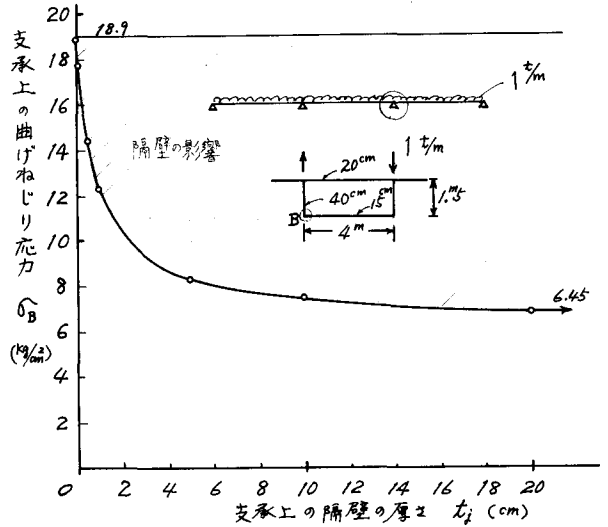


図-7. 曲げねじり応力におよぼす支承上隔壁の影響

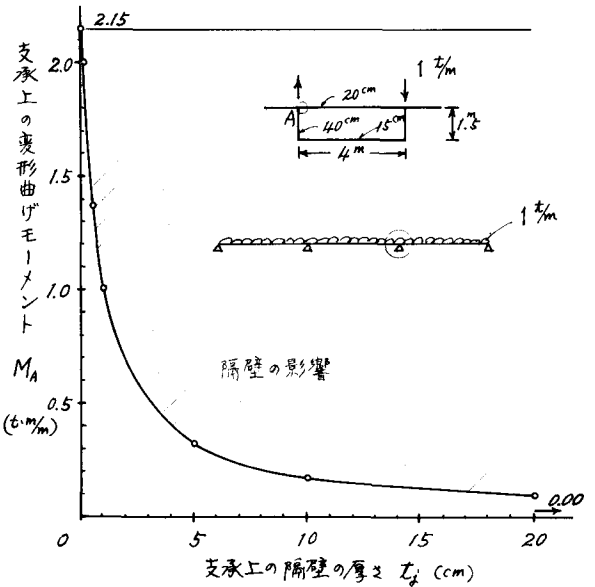


図-8. 変形曲げモーメントにおよぼす支承上隔壁の影響

計算結果の一例を図-7, 図-8 に示す。これによれば、支承上隔壁の厚さは数cmでよいことがわかる。