

東京大学工学部 正員 奥村敏恵  
電力中央研究所 正員 ○中村秀治

1. 序 薄肉梁の解析理論は断面変形を考慮するかしないかで大きく2つに分けられる。St. Venantの捻りおよび曲げ捻り理論などは断面不変を前提として組立てられているが、薄肉梁に局所的な荷重が作用する時、そこにダイヤフラムが無ければ断面変形は梁の挙動に著しい影響を与える。薄肉梁を何枚かの薄板の集合と見なし、薄板の境界での適合条件を満足させて解析すれば薄肉梁の断面変形と考慮した完全な解析が可能である。またダイヤフラムの効果を検討する事も可能になる。本論文では薄肉梁を板要素の集合と考え一種の有限要素解析と言える方法により数値計算し、さらにダイヤフラムを二次元問題の剛性マトリクスで置きかえてダイヤフラムの効果を検討するものである。

2. 解析方法<sup>1)</sup> Fig.1に斜線で示す板要素*ij*について次の変位関数を仮定する。ここで*w*, *u*はそれぞれ*S*, *S*軸方向の板要素面内変位、*v*は面外変位、*w<sub>i</sub>*, *u<sub>i</sub>*, ..., *w<sub>j</sub>*, *u<sub>j</sub>*, ... は*i*, *j*辺の節線変位とする。*b*は板幅。

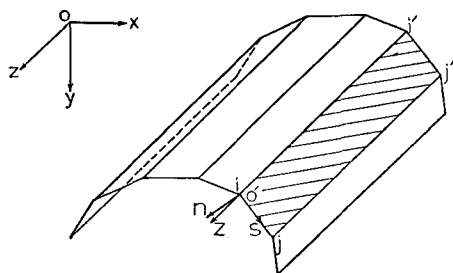


Fig.1 要素分割

$$w(z, S) = (1 - \frac{S}{b})w_i(z) + \frac{S}{b}w_j(z) \quad (1)$$

$$u(z, S) = (1 - \frac{S}{b})u_i(z) + \frac{S}{b}u_j(z) \quad (2)$$

$$v(z, S) = (1 - \frac{3}{b}S^2 + \frac{2}{b^3}S^3)v_i(z) + (\frac{3}{b}S^2 - \frac{2}{b^3}S^3)v_j(z) + (-\frac{1}{b}S^2 + \frac{1}{b^3}S^3)\theta_i(z) + (\frac{1}{b}S^2 - \frac{1}{b^3}S^3)\theta_j(z) \quad (3)$$

$$\theta(z, S) = \frac{\partial v(z, S)}{\partial S} \quad (4)$$

この変位関数を用い Galerkin法により節線変位、節線外力の関係式を連立常微分方程式で表わすと。

$$\begin{Bmatrix} w_i(z) \\ u_i(z) \\ v_i(z) \\ \theta_i(z) \\ w_j(z) \\ u_j(z) \\ v_j(z) \\ \theta_j(z) \end{Bmatrix} = \left\{ [K_1] \left( \frac{d}{dz} \right)^4 + [K_2] \left( \frac{d}{dz} \right)^3 + [K_3] \left( \frac{d}{dz} \right)^2 + [K_4] \right\} \begin{Bmatrix} w_i(z) \\ u_i(z) \\ v_i(z) \\ \theta_i(z) \\ w_j(z) \\ u_j(z) \\ v_j(z) \\ \theta_j(z) \end{Bmatrix} \quad (5)$$

ここで *w<sub>i</sub>*(*z*), *u<sub>i</sub>*(*z*), ..., *w<sub>j</sub>*(*z*), ... は *i*, *j* 辺の節線外力を示し、[*K<sub>k</sub>*] ... は以下に示すマトリクスである。

$$[K_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{ij}(\frac{13}{35})b_{ij} & D_{ij}(\frac{11}{210})b_{ij}^2 & 0 & 0 & D_{ij}(\frac{9}{70})b_{ij} & D_{ij}(\frac{13}{420})b_{ij}^2 \\ D_{ij}(\frac{1}{105})b_{ij}^3 & 0 & 0 & 0 & D_{ij}(\frac{13}{420})b_{ij}^2 & D_{ij}(\frac{1}{40})b_{ij}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{ij}(\frac{13}{35})b_{ij} & D_{ij}(\frac{11}{210})b_{ij}^2 \\ & & & & & D_{ij}(\frac{1}{105})b_{ij}^3 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Sym.

$$[K_2] = \begin{bmatrix} K_{ij}(-\frac{1}{3})b_{ij} & 0 & 0 & 0 & K_{ij}(-\frac{1}{6})b_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ & K_{ij}(-\frac{1+\nu}{6})b_{ij} & 0 & 0 & 0 & K_{ij}(-\frac{1+\nu}{12})b_{ij} & 0 & 0 \\ & & D_{ij}(-\frac{12}{5})\frac{1}{b_{ij}} & D_{ij}(-\nu-\frac{1}{3}) & 0 & 0 & D_{ij}(-\frac{12}{5})\frac{1}{b_{ij}} & D_{ij}(-\frac{1}{5}) \\ & & & D_{ij}(-\frac{4}{15})b_{ij} & 0 & 0 & D_{ij}(-\frac{1}{5}) & D_{ij}(-\frac{1}{15})b_{ij} \\ & & & & K_{ij}(-\frac{1}{3})b_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & K_{ij}(-\frac{1+\nu}{6})b_{ij} & 0 & 0 \\ & & & & & & D_{ij}(-\frac{12}{5})\frac{1}{b_{ij}} & D_{ij}(-\nu+\frac{1}{3}) \\ & & & & & & & D_{ij}(-\frac{4}{15})b_{ij} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Sym.

$$[K_3] = \begin{bmatrix} 0 & K_{ij}(-\frac{1+3\nu}{4}) & 0 & 0 & 0 & K_{ij}(-\frac{1+\nu}{4}) & 0 & 0 \\ K_{ij}(-\frac{1+3\nu}{4}) & 0 & 0 & 0 & K_{ij}(-\frac{1+\nu}{4}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{ij}(-\frac{1+\nu}{4}) & 0 & 0 & 0 & K_{ij}(-\frac{1+3\nu}{4}) & 0 & 0 \\ K_{ij}(-\frac{1+\nu}{4}) & 0 & 0 & 0 & K_{ij}(-\frac{1+3\nu}{4}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$[K_4] = \begin{bmatrix} K_{ij}(-\frac{1+\nu}{2})\frac{1}{b_{ij}} & 0 & 0 & 0 & K_{ij}(-\frac{1+\nu}{2})\frac{1}{b_{ij}} & 0 & 0 & 0 \\ & K_{ij}(-\frac{1}{b_{ij}}) & 0 & 0 & 0 & K_{ij}(-\frac{1}{b_{ij}}) & 0 & 0 \\ & & D_{ij}(-\frac{12}{b_{ij}^3}) & D_{ij}(-\frac{6}{b_{ij}^2}) & 0 & 0 & D_{ij}(-\frac{12}{b_{ij}^3}) & D_{ij}(-\frac{6}{b_{ij}^2}) \\ & & & D_{ij}(-\frac{4}{b_{ij}}) & 0 & 0 & D_{ij}(-\frac{6}{b_{ij}^2}) & D_{ij}(-\frac{2}{b_{ij}}) \\ & & & & K_{ij}(-\frac{1+\nu}{2})\frac{1}{b_{ij}} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & K_{ij}(-\frac{1}{b_{ij}}) & 0 & 0 \\ & & & & & & D_{ij}(-\frac{2}{b_{ij}^3}) & D_{ij}(-\frac{6}{b_{ij}^2}) \\ & & & & & & & D_{ij}(-\frac{4}{b_{ij}}) \end{bmatrix} \quad (9)$$

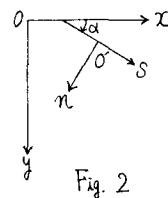
Sym.

ここで、 $b_{ij}$ ,  $t_{ij}$ はそれぞれ要素 $ij$ の板幅、板厚を示し、 $K_{ij} = \frac{Et_{ij}}{1-\nu^2}$ ,  $D_{ij} = \frac{Et_{ij}^3}{12(1-\nu^2)}$ とする。

梁全体の剛性マトリクスを作るには局所座標系から全体座標系に変換する必要がある。(5)式の剛性マトリクスを $[\tilde{K}]$ で表わし全体座標になおしたものを $[K]$ とすれば

$$[K] = [T][\tilde{K}][T] \quad (10)$$

ここで、 $[T]$ はFig. 2に示す座標変換マトリクスとする。



$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 3. ダイヤフラムの取扱いについて

ダイヤフラムの剛性を考えて解析するには、二次元問題の有限要素剛性マトリクス<sup>(2)</sup>で置きかえるのが適当であろう。そこで $[K]$ をダイヤフラムの剛性マトリクス、 $[K]$ は(5), (10)式から得られる梁の剛

性マトリクスとすれば、原理的には次の関係式が成立する。

$$\{F\} - [\bar{K}]\{\delta\} = [K]\{\delta\} \quad \text{より} \quad \{F\} = ([K] + [\bar{K}])\{\delta\} \quad (11)$$

ここで、 $\{F\}$ は薄肉梁に作用する節線外力、 $\{\delta\}$ は節線変位とする。 $[\bar{K}]\{\delta\}$ は梁とダイヤフラムの間の不静定力になり(11)式はダイヤフラムの入った薄肉梁のマトリクス関係式になる。ただし、梁とダイヤフラムは変位のとり方、外力の与え方が全く異なるため、 $[K]$ 、 $[\bar{K}]$ を多少変形しなければならない。(5)式の連立常微分方程式を級数解法で解くか差分で解くかによっても $[K]$ 、 $[\bar{K}]$ の変形法は変わる。級数解法の場合については、ダイヤフラムの変位および梁との間の不静定力を級数表示になおすように $[\bar{K}]$ も変形すればよい。<sup>(3)</sup>

このようなダイヤフラムの取り扱い方では、ダイヤフラムの面内剛性は考慮できても面外剛性までは考慮できない。また格点以外では梁とダイヤフラムの変位の適合性が満足されない等の問題はあるが、実験結果との比較によれば比較的良好な解が得られるように思われる。

4. 計算結果の検討<sup>(3)</sup> (5)式で表わされる連立常微分方程式を解くために級数解法を用いる。

両端より自由、単純支持とすれば、 $w_1(x)$ 、 $w_2(x)$ は $\cos$ のFourier級数に、その他は $\sin$ のFourier級数に展開するのが適当である。級数項は5項取り、連立一次方程式の解法には共役勾配法を用いた。

① まず(5)式で示された計算法の精度を調べるためFig.3に示す箱型梁の中央に図示のような荷重をかけて計算した。この場合ダイヤフラムは剛性無限大のものが二両端に配置されている。材料はSteelである。Fig.4によれば実験値と計算値はよく一致する事がわかる。

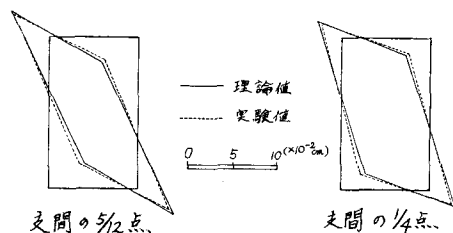


Fig.4 断面変形の比較

なお箱型梁の節線11'、22'中央に同方向で同荷重Pをかけた場合も、実験値と計算値はよく一致した。

② 次に多くの計算例によりこの解析法の適用限界を調べたところ次の事がわかった。

- ・級数解法で共役勾配法を使うと収束性が悪く、要素分割は10分割程度までが適当である。
- ・級数項は多く取ると急速に収束性が悪くなる。5～7項が適当である。しかし変位に関しては5項でも十分良い解が得られる。
- ・梁軸に直角方向の荷重をかける場合、開断面材では非常に収束性が悪い。
- ・梁軸方向の荷重をかける場合、開断面材でも閉断面材でも収束性が良い。
- ・要素分割の際、あまり要素の板幅、板厚に差がありすぎると収束性が悪くなる。

なお共役勾配法は倍精度で計算し、初期値は0、精度は0.1%とした。

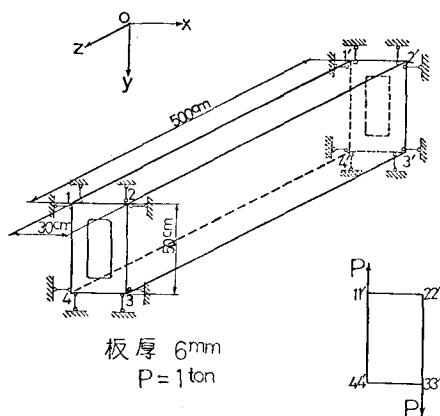


Fig.3 箱型梁の解析および実験例

③ Fig.3における箱型梁の中央に厚さ1cmのダイヤフラムを1枚入れ、①と同じ荷重条件で計算した。ダイヤフラムの要素分割は4隅および重心に格点を取り4要素に分割した。Fig.5に実験値と計算値の比較を示した。良好な結果と言えよう。

Fig.4と同様Fig.5でも実験値が理論値より小さくでているのは、試験体両端の支持状態が計算上の境界条件を十分に実現できずうめ込み端に近くなったためと思われる。

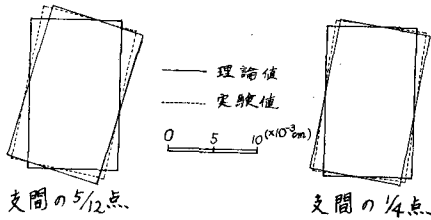


Fig.5 断面変形の比較

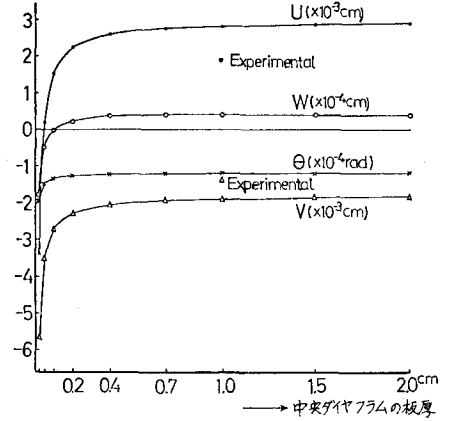


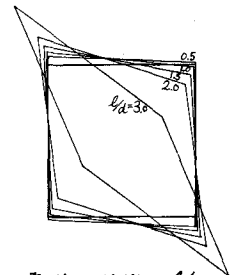
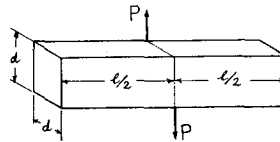
Fig.6 断面変形とダイヤフラム板厚との関係

④ そこで③と同じ条件で、ただ中央ダイヤフラムの板厚だけを変えて計算し、薄肉梁とダイヤフラムの板厚の関係を調べたのがFig.6である。横軸は中央ダイヤフラムの板厚、縦軸は節線1fで支間の5/12点における $u$ ,  $w$ ,  $\theta$  変位および $\theta$  回転角である。

Fig.6によりダイヤフラムはある板厚を境にしてそれ以下では急速に効果を失い、それ以上ではいくら厚くしても効果は変わらない様子が見られる。この計算例の場合その境界の値は5mm程度である。

⑤ 最後に箱型梁のダイヤフラム間隔はどれくらいが見当をつけるために、断面変形には最も不利なすり荷重を支間中央にかけた場合で支間のみ順次変えて計算してみた。両端支持条件はFig.3と同じである。

梁の断面形は一边 $d$ の正方形とし支間 $l$ 、板厚 $t$ とした時、 $t$ にはほぼ無関係にFig.7の断面変形を起す。



す。  $l/d < 1$  では梁の腹板が全どの荷重を受け、変形は小さい。  $1 \leq l/d < 1.5$  では依然腹板が全どの荷重を受けるが、板の面外変形も出はじめる。  $1.5 \leq l/d$  になると梁のラーメン剛性で荷重を受け、断面変形量は急速に増大する。

Fig.7 断面変形の形状と $l/d$ の関係

5. 結論 以上で断面変形を考慮した薄肉梁の一解析法とその精度、適用限界を述べ、更にダイヤフラム取扱いの一方法を示し、ダイヤフラムの最適板厚の存在および最適ダイヤフラム間隔についても考察した。ダイヤフラムの効果について傾向はわかりつめたものと思う。なお(5)式を構造全体に重ね合わせた連立常微分方程式の解法において差分法の適用も有効である。

参考文献 (1) 奥村敏恵、坂井藤一：「薄肉平板より成る立体的構造物の静力学的解析に関する一方法とその応用」 土木学会論文報告集 No. 176, 1970-4

(2) O.C. Zienkiewicz, Y.K. Chung: 「The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics」, McIlraw-Hill

(3) 中村秀治：「薄肉弾性梁の静力学的挙動について」 東京大学修士論文 1971