

I-165 帯板要素法によるボックスカルバートの応力解析について

室蘭工業大学 正員 能町 純雄

正員 松岡 健一

学生員 ○越後 隆一

1. はじめに

最近、交通量の増加に伴ない地下埋設構造物の設計、施工が多くなっている。従来、これらの構造物は、横断方向にボックスラ－Xレ構造とし、軸方向には弾性床上の梁として解析が行われていたようである。著者らはここにラ－Xレ作用と壁面応力とを関連させながら底板を弾性床上の板とみなして立体的に応力解析を試みた。このため先ず弾性床上面の帯板要素公式を示し、側壁と上板は普通平板の帯板要素公式に土圧による荷重項を加え、さらに面内力に対する平面応力の帯板要素公式を考慮してボックスカルバートの立体的応力解析を試みた。

2. 弾性床上面の帯板要素公式

弾性床上面の板をy方向にn枚の帯板要素に分割し、帯板の幅は板の幅に比べて微小とし、地盤反力とたわみは比例すると仮定すると弾性床上面の板の微分方程式は $\Delta w = \frac{q - kw}{N}$ (k: 地盤反力係数) となる。

これに指数型フーリエ変換 $w = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} W_m e^{-i\lambda y} d\lambda$ を適用し、考えている帯板上に荷重がないとし、さらにy方向にフーリエ sin 変換を行なうことにより、この微分方程式と解いて

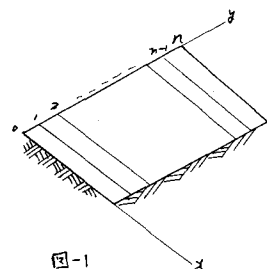


図-1

$$w = Q^*(1-\beta)w_\lambda + Q^*(\beta)w_0 + \frac{P(1-\beta)}{c^2\pi^2} \frac{M_\lambda^* \lambda^2}{N} + \frac{P(\beta)}{c^2\pi^2} \frac{M_0^* \lambda^2}{N}$$

$$\Delta w = Q^*(1-\beta) \left\{ -\frac{M_\lambda^*}{N} + \ddot{w}_\lambda \right\} + Q^*(\beta) \left\{ -\frac{M_0^*}{N} + \ddot{w}_0 \right\} + \frac{P(1-\beta)}{c^2\pi^2} \left\{ -\frac{M_\lambda^* \lambda^2}{N} + \ddot{w}_\lambda \lambda^2 \right\} + \frac{P(\beta)}{c^2\pi^2} \left\{ -\frac{M_0^* \lambda^2}{N} + \ddot{w}_0 \lambda^2 \right\} \\ + \frac{P(1-\beta)}{c^2\pi^2} \frac{K}{N} \lambda^2 w_\lambda + \frac{P(\beta)}{c^2\pi^2} \frac{K}{N} \lambda^2 w_0$$

ここで

$$P(\beta) = \frac{\sinh \frac{\pi c}{\sqrt{2}} (2-\beta) \sin \frac{\pi c}{\sqrt{2}} \beta - \sinh \frac{\pi c}{\sqrt{2}} \beta \sin \frac{\pi c}{\sqrt{2}} (2-\beta)}{\cosh \sqrt{2} \pi c - \cos \sqrt{2} \pi c}$$

$$Q(\beta) = \frac{\cosh \frac{\pi c}{\sqrt{2}} (2-\beta) \sin \frac{\pi c}{\sqrt{2}} \beta - \sinh \frac{\pi c}{\sqrt{2}} \beta \cos \frac{\pi c}{\sqrt{2}} (2-\beta)}{\cosh \sqrt{2} \pi c - \cos \sqrt{2} \pi c}$$

$$c = \sqrt{\frac{K}{N}} \frac{x}{\pi}, \beta = \frac{y}{\lambda}, M_\lambda^* = -N \frac{d^2 w}{dy^2}, N = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

これらの式から、帯板の境界点で

$x = x_r$ と

$$M_{r+1} = \frac{N}{\lambda} \left[\beta \theta_r + 2\alpha \theta_{r+1} - \frac{\phi w_{r+1} - \psi w_r}{\lambda} \right] - \nu N \ddot{w}_r$$

$$M_{r,r+1} = -\frac{N}{\kappa\lambda} \left[2\alpha\theta_{r+1} + \beta\theta_r - \frac{\varphi\dot{w}_r - \phi\dot{w}_{r+1}}{\lambda} \right] - \nu N\ddot{w}_r$$

せん断力

$$Q_{r,r+1} = \frac{(2JM_{r,r+1} - DM_{r,r+1})}{\lambda} - \frac{N(1-\nu)(2\dot{w}_{r+1} - D\dot{w}_r)}{\lambda} + \lambda \left\{ (\beta\ddot{M}_{r,r+1} + 2\alpha\ddot{M}_{r,r+1}) - N(1-\nu)(3\ddot{w}_r + 2\ddot{w}_{r+1}) \right\}$$

$$Q_{r,r+1} = \frac{(DM_{r,r+1} - 2JM_{r,r+1})}{\lambda} - \frac{N(1-\nu)(D\dot{w}_r - 2\dot{w}_{r+1})}{\lambda} - \lambda \left\{ (2\alpha\ddot{M}_{r,r+1} + \beta\ddot{M}_{r,r+1}) - N(1-\nu)(2\ddot{w}_{r+1} + 3\ddot{w}_r) \right\}$$

$$-K\lambda\beta\dot{w}_r - K\lambda 2\alpha\dot{w}_{r+1}$$

$$-K\lambda 2\alpha\dot{w}_{r+1} + K\lambda\beta\dot{w}_r$$

$\therefore 12$

$$A = \frac{\frac{\pi C}{\sqrt{2}}}{H} \left(\cosh \frac{\pi C}{\sqrt{2}} \sin \frac{\pi C}{\sqrt{2}} - \sinh \frac{\pi C}{\sqrt{2}} \cos \frac{\pi C}{\sqrt{2}} \right), B = \frac{\frac{\pi C}{\sqrt{2}}}{H} \left(\sinh \sqrt{2} \pi C - \sin \sqrt{2} \pi C \right)$$

$$D = \frac{\frac{\pi C}{\sqrt{2}}}{H} \left(\sinh \sqrt{2} \pi C + \sin \sqrt{2} \pi C \right), J = \frac{\frac{\pi C}{\sqrt{2}}}{H} \left(\cosh \frac{\pi C}{\sqrt{2}} \sin \frac{\pi C}{\sqrt{2}} + \sinh \frac{\pi C}{\sqrt{2}} \cos \frac{\pi C}{\sqrt{2}} \right)$$

$$H = \cosh \sqrt{2} \pi C - \cos \sqrt{2} \pi C, \kappa = \beta^2 - 4\alpha^2, \varphi = 4\alpha J + \beta D, \phi = 2\beta J + 2\alpha D$$

3. 普通平板の帯板要素公式

帯板の境界r点

$$\pm \chi \text{ 点 } M_{r,r+1} = \frac{2N}{\lambda} \left[2\theta_r + \theta_{r+1} - \frac{3}{\lambda} (\dot{w}_{r+1} - \dot{w}_r) \right] - \nu N\ddot{w}_r$$

$$M_{r,r+1} = -\frac{2N}{\lambda} \left[2\theta_r + \theta_{r+1} - \frac{3}{\lambda} (\dot{w}_r - \dot{w}_{r+1}) \right] - \nu N\ddot{w}_r$$

$$Q_{r,r+1} = \frac{M_{r,r+1} - M_r}{\lambda} - \frac{N(1-\nu)(\ddot{w}_{r+1} - \ddot{w}_r)}{\lambda} + \frac{\lambda}{6} \left\{ (2\ddot{M}_{r,r+1} + \ddot{M}_{r,r+1}) - N(1-\nu)(2\ddot{w}_r + \ddot{w}_{r+1}) \right\}$$

$$Q_{r,r+1} = \frac{M_r - M_{r+1}}{\lambda} - \frac{N(1-\nu)(\ddot{w}_r - \ddot{w}_{r+1})}{\lambda} - \frac{\lambda}{6} \left\{ (\ddot{M}_{r,r+1} + 2\ddot{M}_{r,r+1}) - N(1-\nu)(\ddot{w}_{r+1} + 2\ddot{w}_r) \right\}$$

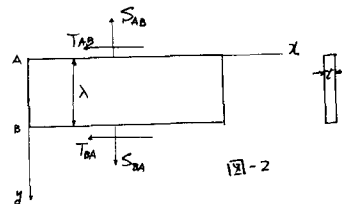
4. 平面応力の帯板要素公式

$$T_{AB} = Et\lambda(2\ddot{u}_A + \ddot{u}_B) + \frac{S_{AB} - S_{BA}}{\lambda}$$

$$Gt\ddot{v}_s = Gt \frac{\dot{u}_A - \dot{u}_B}{\lambda} + \frac{S_{AB} - S_{BA}}{\lambda}$$

T: せん断力 u: 軸変位

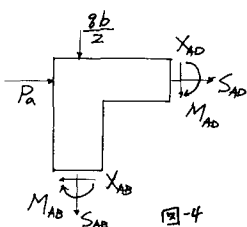
S: 法線力 $\therefore \chi$ 点



5. つり合い条件式

断面の軸方向歪を無視する。対称荷重が作用

上下両端は同じ変位を生ずるものとする。

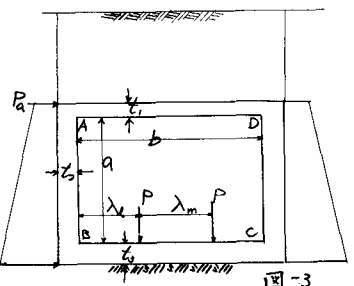


すなわち $w_A = w_B, w_C = w$

1) A点

$$\sum M = 0: M_{AB} + M_{AD} = 0 \quad (1)$$

$$\sum V = 0: \frac{8b}{2} + X_{AD} + S_{AB} = 0 \quad (2)$$



$$\sum H=0: P_b - X_{AB} + S_{AB} = 0 \quad \text{---- (3)} \quad \sum T=0: T_{AB} + T_{AB} = 0 \quad \text{---- (4)}$$

ii) B点

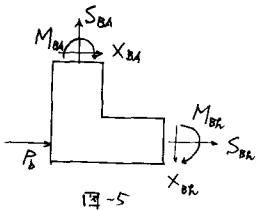


図-5

$$Gt_2 \ddot{w}_B = Gt_2 \frac{\dot{u}_A - \dot{u}_B}{a} + \frac{S_{AB} - S_{BA}}{a} \quad \text{---- (5)}$$

$$\sum M=0: M_{BA} + M_{BR} = 0 \quad \text{---- (6)} \quad \sum V=0: S_{BA} - X_{BR} = 0 \quad \text{---- (7)}$$

$$\sum H=0: P_b + X_{BA} + S_{BR} = 0 \quad \text{---- (8)} \quad \sum T=0: T_{BA} + T_{BR} = 0 \quad \text{---- (9)}$$

iii) R点

$$\sum M=0: M_{RB} + M_{RR'} = 0 \quad \text{---- (10)} \quad \sum V=0: Q_{RR'} - Q_{AB} = -P \quad \text{---- (11)}$$

$$\sum T=0: T_{RR'} + T_{RB} = 0 \quad \text{---- (12)}$$

$$v_{RB} = v_{RR'}: Gt_3 \frac{\dot{u}_B - \dot{u}_C}{\lambda_i} + \frac{S_{RB} - S_{RR'}}{\lambda_i} = 0 \quad \text{---- (13) (対称故)}$$

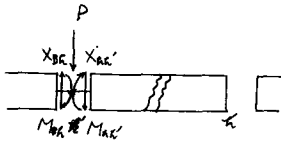


図-6

普通平板，弾性床土板の帯板要素公式，平面応力の帯板要素公式から，モーメント，せん断力等を各点で求め，つり合い条件式に代入し

これらの式から法線力を消去し，対称条件，境界条件（simple support）を考慮して方向は7-

1) エイム変換して整理すると

$$(1) \text{ 57} \quad \frac{N_2}{a} C_1 \bar{\theta}_A + \frac{2N_2}{a} \bar{\theta}_B - \nu N_1 \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \bar{w}_B + a^2 L_1 \bar{\theta}_0 = 0$$

$$(6) \text{ 57} \quad \frac{2N_2}{a} \bar{\theta}_A + \frac{N_2}{\lambda_i} C_2 \bar{\theta}_B + \frac{N_2}{\lambda_i} \frac{2\alpha_i}{k_i} \bar{\theta}_B + \frac{N_2}{\lambda_i^2} C_3 \bar{w}_B - \frac{N_2}{\lambda_i^2} \frac{\phi_i}{k_i} \bar{w}_B + a^2 L_2 \bar{\theta}_0 = 0$$

$$(10) \text{ 57} \quad \frac{N_2}{\lambda_i} \frac{2\alpha_i}{k_i} \bar{\theta}_B + \frac{N_2}{\lambda_i} C_4 \bar{\theta}_B + \frac{N_2}{\lambda_i^2} \frac{\phi_i}{k_i} \bar{w}_B - \frac{N_2}{\lambda_i^2} C_5 \bar{w}_B = 0$$

$$(11) \text{ 57} \quad \frac{N_2}{\lambda_i^2} \frac{\phi_i}{k_i} \bar{\theta}_B + \frac{N_2}{\lambda_i^2} C_5 \bar{\theta}_B - \frac{N_2}{\lambda_i^2} L_1 \bar{w}_B - \frac{N_2}{\lambda_i^2} L_2 \bar{w}_B = -\bar{P}$$

$$(12), (15), (17) \text{ 57} \quad -\frac{N_1}{a} \nu \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \bar{\theta}_A - \frac{N_2}{a \lambda_i^2} C_3 \bar{\theta}_B - \frac{N_2}{a \lambda_i^2} \frac{\phi_i}{k_i} \bar{\theta}_B - \frac{N_2}{a \lambda_i^2} L_3 \bar{w}_B - \frac{N_2}{a \lambda_i^2} L_4 \bar{w}_B + L_3 \bar{\theta}_0 = 0$$

$$(4), (15) \text{ 57} \quad Gt_2 \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \bar{w}_B + E L_5 \bar{u}_B - E L_6 \bar{u}_B + E L_7 \bar{u}_B = 0$$

$$(15), (19) \text{ 57} \quad Gt_2 \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \bar{w}_B - E L_8 \bar{u}_B + E L_9 \bar{u}_B = 0$$

$$(12), (13) \text{ 57} \quad E L_2 \bar{u}_B - E L_3 \bar{u}_B = 0$$

2212

$$C_1 = 4 + 2 \frac{a}{b} \frac{N_1}{N_2}, \quad C_2 = 4 \frac{N_2 \lambda_i}{N_3 a} + \frac{\beta_i}{k_i}, \quad C_3 = \nu \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \lambda_i^2 + \frac{\phi_i}{k_i}, \quad C_4 = \frac{\beta_i}{k_i} + \frac{\lambda_i}{\lambda_m} \frac{\beta_m - 2\alpha_m}{k_m}$$

$$C_5 = \frac{\phi_i}{k_i} + \frac{\lambda_i^2}{\lambda_m^2} \frac{\phi_m - \phi_m}{k_m}, \quad L_1 = 2\alpha_i \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \lambda_i^2 + \left(\frac{2\alpha_i \phi_i - \beta_i \phi_i}{k_i} - 2J_e \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \lambda_i^2 + (K \lambda_i^2 2\alpha_i - \frac{D_0 \phi_i + 2J_e \phi_i}{k_i}) \right)$$

$$L_2 = \left\{ \frac{\lambda_i}{\lambda_m} (2\alpha_m + \beta_m) + \beta_i \right\} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \lambda_i^2 + \left\{ D_i + \frac{\beta_i \phi_i - 2\alpha_i \phi_i}{k_i} + \frac{\lambda_i}{\lambda_m} (D_m - 2J_m) + \frac{\lambda_i}{\lambda_m} \frac{(2\alpha_m + \beta_m)(\phi_m - \phi_m)}{k_m} \right\} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \lambda_i^2$$

$$+ \left\{ \frac{D_0 \phi_i + 2J_e \phi_i}{k_i} - \frac{\lambda_i^2}{\lambda_m^2} (2J_m + D_m)(\phi_m - \phi_m) + \frac{K}{N_3} \lambda_i^2 \beta_i + \frac{K}{N_3} \lambda_m \lambda_i^2 (2\alpha_m + \beta_m) \right\}$$

$$L_3 = \left(\frac{b}{2a} \frac{N_1}{N_2} + \frac{\lambda_i}{a} \beta_i \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \right) a \lambda_i^3 + \left(\frac{\beta_i \phi_i - 2\alpha_i \phi_i}{k_i} + D_i + \frac{G}{N_3} t_2 a \lambda_i \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \lambda_i^2 + \left(\frac{D_0 \phi_i + 2J_e \phi_i}{k_i} + \frac{K}{N_3} \lambda_i \beta_i \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
L_1 &= 2\lambda_e \left(\frac{m\pi}{l} \right)^4 \lambda_e^4 + \left(\frac{2\lambda_e \phi_e - 3\phi_e}{k_e} - 2J_e \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \right) \lambda_e^2 + \left(\frac{k}{\lambda_e} \lambda_e^4 - 2\lambda_e \phi_e + D_e \phi_e \right) \\
L_5 &= -a t_2 \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \frac{G}{E} \frac{t_2}{a}, \quad L_6 = 2a t_2 \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \left(1 + \frac{\lambda_e t_2}{a t_2} \right) + \frac{G}{E} \frac{t_2}{\lambda_e} \left(1 + \frac{\lambda_e t_2}{a t_2} \right) \\
L_7 &= -t_3 \lambda_e \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \frac{G}{E} \frac{t_3}{\lambda_e}, \quad L_8 = 2a t_2 \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \left(1 + \frac{3b t_2}{2a t_2} \right) + \frac{G}{E} \frac{t_2}{a} \\
L_9 &= -a t_2 \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \frac{G}{E} \frac{t_2}{a}, \quad L_{10} = -\lambda_e t_2 \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \frac{G}{E} \frac{t_2}{\lambda_e}, \quad L_{11} = 2t_3 \lambda_e \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \left(1 + \frac{3\lambda_m}{2\lambda_e} \right) + \frac{G}{E} \frac{t_2}{\lambda_e} \\
L_{12} &= \frac{C_{A0} + C_{A0}}{b_0 a^2}, \quad L_{13} = \frac{C_{B0}}{b_0 a^2}, \quad L_{14} = \frac{-2C_{A0}}{b_0 b_0} + \frac{b}{2a}
\end{aligned}$$

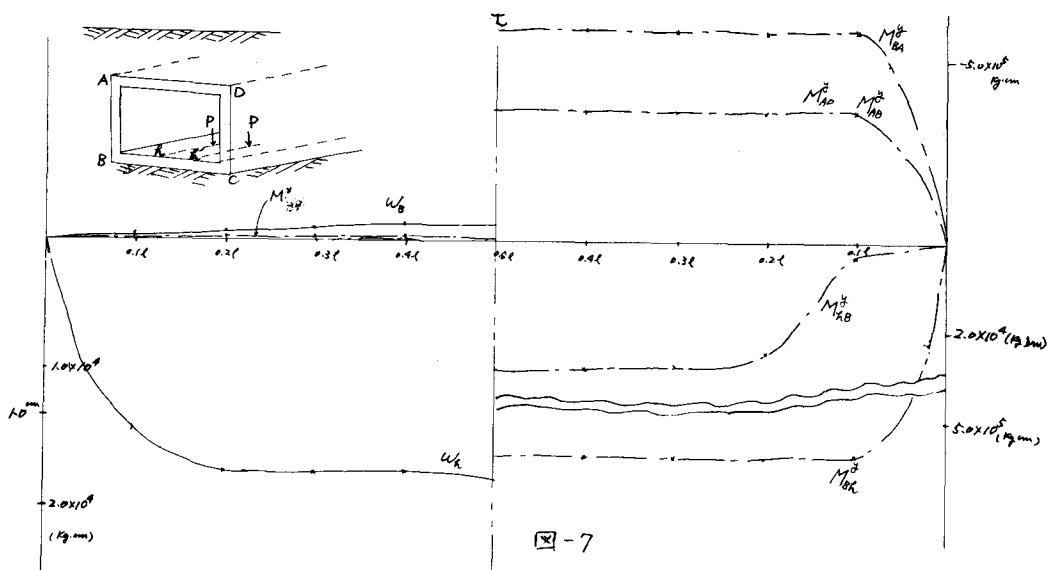
この連立方程式を解き、逆変換することにより、各断面力を求める。

6. 数値計算

土の単重 1.65 t/m^3 、内部摩擦角 30° 、粘着力なし。ウレキン公式により土圧を求める。

$b = 10 \text{ m}$, $a = 5 \text{ m}$, $l = 25 \text{ m}$, $t_1 = 20 \text{ mm}$, $t_2 = 30 \text{ mm}$, $t_3 = 40 \text{ mm}$, $P = 10^6$, $E = 3 \times 10^8 \text{ kg/mm}^2$, $\nu = 0.0$

$K = 5 \text{ kg/mm}^2$, $\pm$ の値 2 m , $\lambda_1 = 2.5 \text{ m}$



以下

普通平板、弾性床土板の帯板要素公式、平面応力の帯板要素公式の応用として対称構造のボックスカルバートを扱ったが、一般構造、土圧に振動問題と解き進める予定である。

参考文献

Sumio G. Nomachi: On Bending of Multi-Equi-Cell Plate, Reprinted from The Memoirs of the Muroran Institute Technology (Science and Engineering) Vol. 6, No. 2 July 1968

能町、松岡、堀米: 帯板要素による応力解析法, 土木学会北海道支部、研究発表論文集、(昭和44年度)